

**VESITEKNIIKAN LAITOS
TEKNILLINEN KORKEAKOULU**

**DIVISION OF WATER ENGINEERING
HELSINKI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY**

**MATEMAATTISEN OPTIMOINNIN
PERUSTEET VESIVAROJEN
SUUNNITTELUSSA**

**MATTI HEIKKILÄ
ERKKI TUONONEN
PERTTI VAKKILAINEN**

**JULKAISU
REPORT**

5

OTANIEMI FINLAND 1975

ESIPUHE

Käsillä olevan monisteen tarkoituksena on esitellä optimointiopin soveltamista vesivarojen suunnitteluun. Suomenkielellä on toistaiseksi julkaistu alalta ainoastaan muutamia tutkimuksia, jotka keskittyvät vesi- ja viemärlaitosten suunnitteluun. Sentähden on katsottu tarpeelliseksi esittää yleiskatsaus niistä ratkaisumenetelmistä, joita matemaattisella optimoinnilla on vesi-insinööreille tarjottavana. Esitys rajoittuu perusteisiin, jolloin lukijalta ei edellytetä pitkälle meneviä opintoja matematiikassa. Samalla kuitenkin eri menetelmien periaatteet on pyritty esittämään niin yleisesti, että lukija voi halutessaan syventää tietojaan alan erittäin runsaan ulkomaisen kirjallisuuden avulla.

Eri menetelmien soveltamista käytännön tehtävien ratkaisuun on valaistu esimerkeillä. Käytetyt esimerkit ovat yksinkertaistettuja, jotta eri menetelmien olennaisimmat piirteet tulisivat selvästi esiin.

Virike monisteen laatimiseen syntyi vesitalouden oppituolissa keväällä 1974 aloitetun Siuntionjoen vesistötutkimuksen ohjelman suunnittelun yhteydessä. Lopullisen muotonsa esitys on saanut lukuisten vesivarojen suunnittelusta käytyjen keskustelujen ja monisteesta laadittujen luonnosten jälkeen. Päävastuun monisteen laadinnasta on kantanut tekn. lis. Matti Heikkilä.

Vesitalouden assistentit dipl.ins. Erkki Tuononen ja dipl.ins. Pertti Vakkilainen ovat selvittäneet vesivarojen suunnittelua ja siinä esiintyviä ongelmia sekä osallistuneet esimerkkien laadintaan. Vesitalouden professori Jussi Hooli on käsikirjoitukseen tutustuttuaan tehnyt siihen hyödyllisiä muutosehdotuksia.

Merkonomi Kristiina Rousu on suorittanut puhtaaksikirjoituksen ja yo Jussi Pesola on puhtaaksi piirtänyt monisteen kuvat.

Maa- ja Vesitekniikan Tuki on taloudellisesti avustanut tutkimuksen suorittamista.

Otaniemessä lokakuussa 1975

Tekijät

SISÄLLYSLUETTELO

	Sivu
1. Vesivarojen käytön suunnittelu	1
2. Matemaattisen optimoinnin tehtävä	18
3. Matemaattinen malli, kohdefunktio	24
4. Analyttiset menetelmät, Lagrangen kertojat, herkkyysanalyysi, sakkofunktiot	33
5. Gradienttimenetelmät	49
6. Lineaarinen optimointi, duaalisuus, Simplex-algoritmi	57
7. Moniasteiset päätöksentekoprosessit, dynaaminen optimointi	73
8. Stokastiset tekijät	85
9. Simulointimenetelmät	101
10. Yhteenveto	109
Kirjallisuutta	111

1. Vesivarojen käytön suunnittelu

Tulvasuojelun, kastelun, vedenhankinnan ja vesiliikenteen järjestäminen sekä vesivoiman käyttöön ottaminen on johtanut laajoihin vesirakennustöihin, jotka muuttavat oleellisesti vesistöjen ominaisuuksia ja vesistön käyttömahdollisuuksia. Näiden toimintojen vaatima vesivaroihin kohdistuva suunnittelu on yleensä aiemmin ollut ongelma- ja tapauskohtaista. On pyritty tyydyttämään tärkeimpänä esiintyvä tarve kiinnittäen vain vähäistä huomiota muihin intresseihin. Vasta muutaman kymmenen vuoden aikana on harjoitettu systemaattista suunnittelua. Tällöin pyritään kokonaisuuden kannalta optimiratkaisuihin kartoittaen kaikki käyttötarpeet ja vesivarojen tarjoamat mahdollisuudet. Johtuen vesivarojen tärkeästä merkityksestä ja niiden hyväksikäytön vaatimista suurista perusinvestoinneista on valtiovalta usein ottanut päävastuun sekä suunnittelusta että toteuttamisesta.

Tarkastelutahosta riippuen voidaan vesivarojen käytön suunnittelu jakaa eri tavoin osiin tai vaiheisiin. Eräänä pääjakona voidaan pitää jakoa rakentamisen ja käytön suunnitteluun. Edellisessä on kysymys rakentamisen sijoituksesta, mitoituksesta ja ajoituksesta ja jälkimmäisessä kyseeseen tulevien toimintojen säädöstä valitulla aikaperiodilla.

Pitäen erottelukriteerinä sitä tekijää, johon suunnitelman toteutuksella välittömästi vaikutetaan, voidaan suunnittelu jakaa toisaalta suoraan vesivaroihin ja toisaalta niiden käyttöön kohdistuvaan suunnitteluun. Edellisen tavoitteena on vesivarojen, pinta- ja pohjavesien, määrän, laadun ja korkeuden muuttaminen paremmin vesistön ja maankäyttöön soveltuviksi.

Käyttömuotosuunnittelun kohteena on vesistön käyttö, vesistön eri käyttömuodot. Vesistön käyttömuodot jaotellaan tavallisimmin seuraavasti: vedenhankinta (kastelu ml.), jätevesien johtaminen, vesivoimatalous, tulvasuojelu, vesiliikenne, uitto, kalatalous, vesien virkistyskäyttö, erityiskäyttö (luonnonsuojelu yms.). Nämä vesivaroihin kohdistuvat

toiminnot on esitetty kuvassa 1.1.

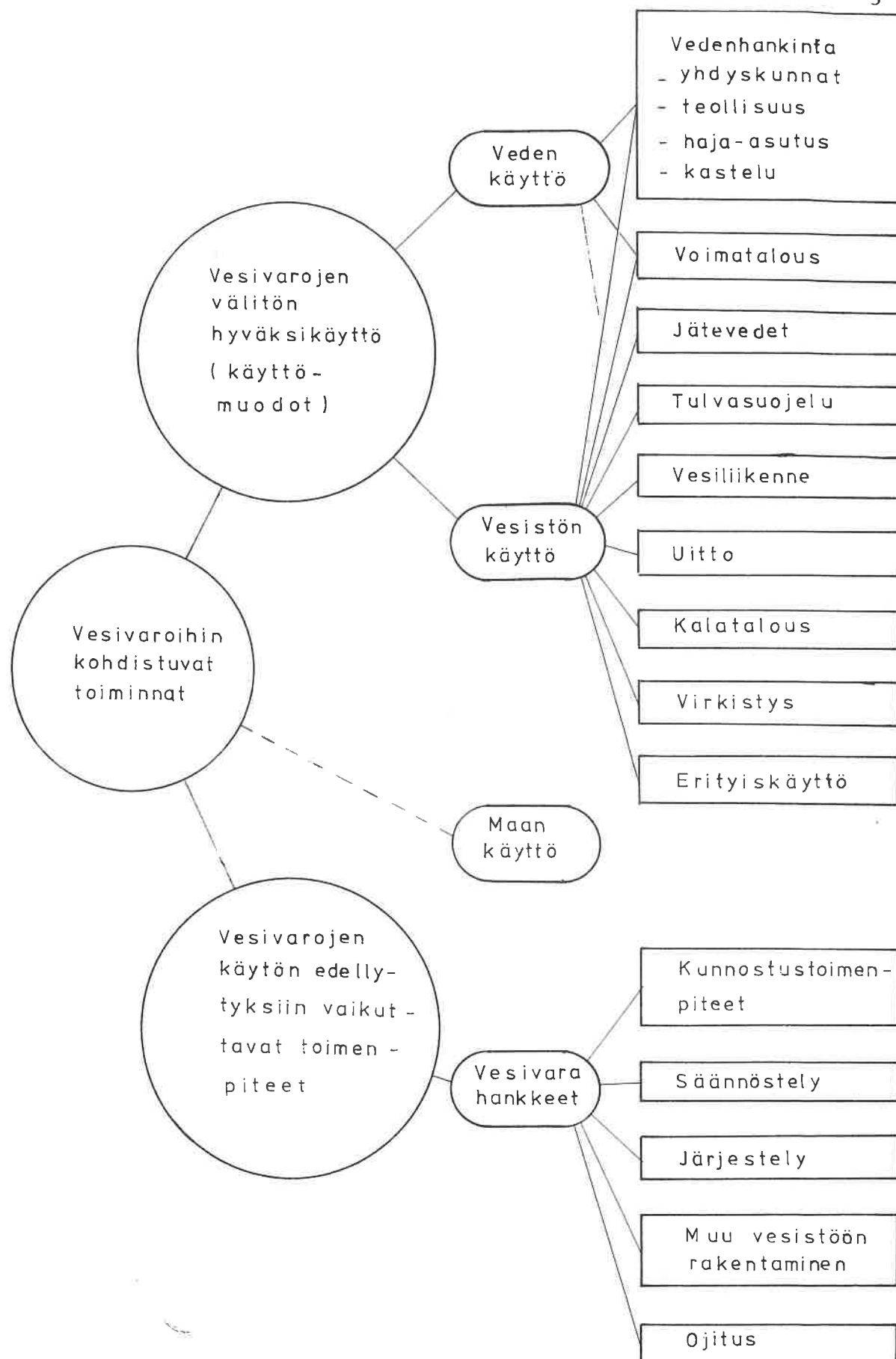
Mainitut suunnittelutehtävät eivät ole toisistaan erillisiä, vaan ne tulee usein suorittaa rinnan. On huomattava, että vesivarojen käyttö ja tuleva käyttötarve määräävät suurelta osalta vesivarasuunnittelun tavoitteet ja rajoitukset.

Vesivarojen käytön suunnittelu voidaan jakaa seuraaviin tasoihin: kokonais-, yleis-, hanke- ja rakennussuunnittelu. Kokonaissuunnittelu on luonteeltaan inventoivaa. Siinä selvitetään suunnittelualan vesiin kohdistuvat käyttötarpeet, niiden ajallinen kehitys, vesivarojen määrä ja käyttökelpoisuus ja arvioitujen taloudellisten resurssien puitteissa määritetään pitkän tähtäimen suuntaviivat vesivarojen käytön kehittämiseksi. Kokonaissuunnittelu on tällöin läheisessä yhteydessä muuhun yhteiskuntasuunnitteluun. Suunnittelutehtävän luonteesta johtuen suunnittelualueet ovat varsin laajoja ja määräytyvät vesistöalueiden ja talousalueiden perusteella.

Kokonaissuunnittelun eräänä tärkeänä tehtävänä on määritellä ja priorisoida alueen yleissuunnittelukohteet. Yleissuunnittelu on luonteeltaan ongelmakeskeistä ts. tällöin tehdään selvitys mahdollisuuksista todetun ja rajatun epäkohdan poistamiseksi. Kyseeseen tulee joko jonkin vesistön käyttömuodon sijoitus ja mitoitus tai jonkin vesivarahankkeen (säännöstely, järjestely, kunnostus) vaihtoehtojen selvitys. Kun ajatellaan suunnittelua jatkuvana prosessina, voidaan kokonaissuunnittelun tehtävänä pitää suunnittelualan yleissuunnitelmien yhteensovittamista.

Hankesuunnittelutasolla suoritetaan lopullisen toteuttamistavan valinta ja selvitetään yksityiskohtaisesti hankkeesta johtuvat positiiviset ja negatiiviset vaikutukset ja hankkeen kannattavuus. Suunnitelman tulee olla niin yksityiskohtainen, että hankkeen oikeudellinen käsittely voidaan suorittaa sen pohjalta.

Yksityiskohtainen rakennussuunnittelu on järkevää suorittaa vasta, kun



Kuva 1.1. Vesivaroihin kohdistuvat toiminnot

hankkeen toteuttamiseen on päätetty ryhtyä. Rakennussuunnitelma on lähinnä tekninen selvitys tehtävistä rakenteista.

Kaikilla suunnittelutasoilla suunnittelu etenee periaatteessa seuraavien vaiheiden kautta: tavoiteasettelu, suunnittelukriteerien määrittely, vaihtoehtojen muodostus, vertailu ja valinta.

Kokonaissuunnittelutasolla tavoite on varsin yleisluonteinen; tehtävänä on yhteiskunnan hyvinvoinnin lisääminen. Tästä johdetaan yksityiskohtaisempia suunnittelukriteereitä koskien esim. ympäristönsuojelua, sosiaalista tasa-arvoisuutta, taloudellista kasvua ja suunnittelualueen toiminnallisia ominaispiirteitä.

Yhteiskunnan hyvinvoinnin lisääminen on sinänsä perimmäisenä tavoitteena myös alemmille suunnittelutasoille, mutta tavoitteet ovat tällöin edellisen suunnitteluvaiheen tuloksena jo tarkemmin määritellyt ja vastaavasti käytettävät suunnittelukriteerit voidaan määritellä yksityiskohtaisemmin. Muodostettujen ratkaisuvaihtoehtojen vertailu ja valinta tulee suorittaa ensisijaisesti taloudelliselta pohjalta. Tällöin tulee kuitenkin ottaa huomioon myös ne vaikutukset, joille ei ole muodostunut selvää hintaa.

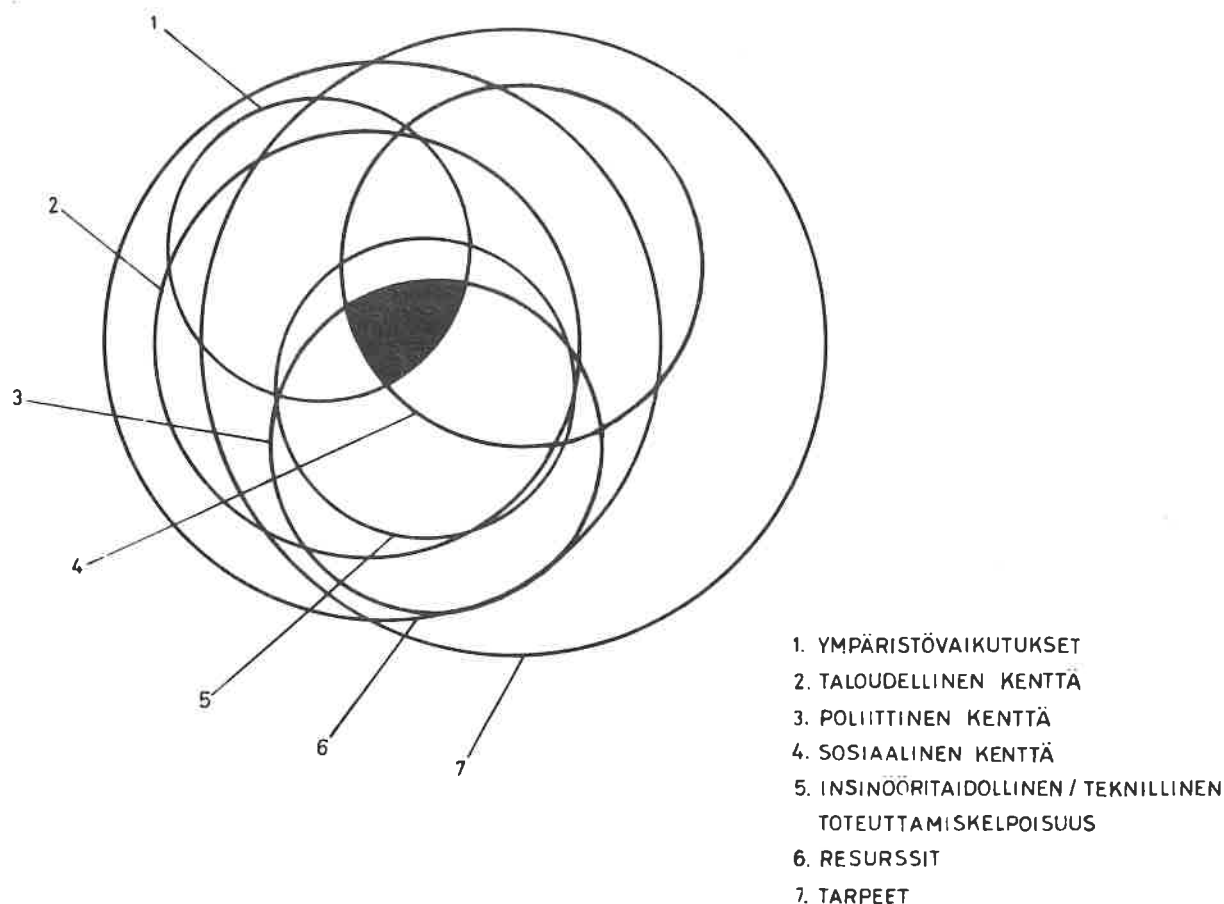
Vesivaroihin kohdistuvan hankkeen välittömänä tehtävänä on muuttaa jotakin vesivarojen hyödyntämiskelpoista tai haitallista ominaisuutta haluttuun suuntaan. Tällaisina ominaisuuksina tulevat kyseeseen ennen muuta seuraavat:

1. pinta- ja pohjavesien uusiutuva määrä
2. kulkukelpoisuus
3. pinta- ja pohjavesien fyysiset ulottuvuudet ja sijainti
4. veden laatu
5. vesivoima (potentiaalienergia)
6. biologinen tuotanto
7. virkistyskäyttökelpoisuus

Suunnittelun tehtävänä on tällöin löytää sellainen tekninen ratkaisutapa, joka rakentamisesta ja hankkeen käytöstä johtuvat taloudelliset ja muut vaikutukset huomioonottaen on edullisin. Vaikeudet tämän ratkaisun löytämisessä johtuvat lähinnä seuraavista seikoista:

1. taloudellisten ja ns. aineettomien vaikutusten arvioimiseen liittyvät vaikeudet
2. hydrologisen kierron tekijöiden ja muun luonnon toiminnan puutteellinen tunteminen ja niiden stokastinen luonne
3. rakennustekniset ongelmat
4. suunnittelutekniset ongelmat

Suunnittelun kannalta tarkastellen on tilanne yleensä se, että vesivarat ja niiden käyttötarpeet huomioonottaen on käytettävissä teknisessä suhteessa useita vaihtoehtoisia tai toisiaan täydentäviä ratkaisumahdollisuuksia. Jo alustavan kustannustarkastelun jälkeen voidaan vaihtoehtojen määrää vähentää. Edelleen ottamalla huomioon sosiaaliset, luonnon-suojelulliset ym. tekijät, pienenee mahdollisten ratkaisujen määrä edelleen. Tilannetta esittää kuva 1.2.



Kuva 1.2. Toteuttamismahdollisuuksien rajat vesivarojen käytön suunnittelussa.

Vaihtoehtoja muodostettaessa ja niitä arvioitaessa on huomattava, että teknisiä perusvaihtoehtoja ei yleensä voida analyttisesti johtaa tarpeista ja resursseista, vaan siihen tarvitaan suunnittelijan ammattitaitoa.

Suunnittelukriteerit täyttäviä ratkaisuja voi olla huomattava joukko, joista tulisi löytää paras. Eräitä laskentatekniikkoja tämän parhaan tai riittävän hyvän ratkaisun löytämiseksi käsitellään jäljempänä tässä esityksessä.

Vaikkakin jo näiden optimointimenetelmien vaatima laskentatyö edellyttää usein tarkasteltavan tehtävän yksinkertaistamista, niin epäilemättä suuremmat virhemahdollisuudet piilevät kuitenkin valinnan perustana olevissa taloudellisissa arvioissa ja myöskin luonnon toiminnan tuntemisessa. Näistä luonnon toiminta, tässä tapauksessa lähinnä hydrologinen kierto on siinä määrin säännönmukaista, että se on luonnontieteiden esiintuomien lainmukaisuuksien ja tilastomatematiikan tarjoamien menetelmien avulla tyydyttävästi hallittavissa olettaen, että on käytettävissä riittävä määrä ko. tapausta koskevia empiirisiä havaintoja. Tällöin ei kuitenkaan voida lähteä siitä, että tietyt tapahtumat sattuvat varmuudella, vaan kysymys on tapahtumien todennäköisyysasteesta. Luonnon osalta vesi-varahankkeen toteuttamiseen aiheutuu epävarmuutta myös geoteknisistä tekijöistä. Maarakennustyöt kuuluvat yleensä välttämättömänä osana rakennustöihin ja muodostavat niistä useinkin pääosan. Tällöin suunnittelijan kokemuksesta ja arvostelukyvystä riippuu oleellisesti se, ovatko geotekniset tutkimukset niin suoritettut, että tarvittavat rakentamistyöt voidaan tyydyttävällä tarkkuudella etukäteen arvioida.

Tilanne on ongelmallisempi hankkeesta tavoiteltavien hyötyjen ja siitä aiheutuvien vahinkojen arvioinnin suhteen. Alustavasti voidaan todeta, että monet näihin liittyvät ongelmat eivät ole ratkaistavissa siinä mielessä, että etukäteen voitaisiin sanoa suoritettujen arvioiden pitävän paikkansa jollakin tietyllä varmuustasolla. Tämä johtuu mm. seuraavista seikoista: Yksilön ja yhteiskunnan arvostukset eivät ole etukäteen luotettavasti määrättävissä, vaan ne muuttuvat ajan mukana. Tekniikka tuo uusia vaihtoehtoisia ratkaisumahdollisuuksia. Taloudellisen kehityksen

kokonaisarvo, sen toiminnallinen suunta tai alueellinen painottuminen muuttuvat eri tavoin kuin on oletettu.

Vesivarahankkeen taloudelliset vaikutukset voidaan jakaa kahteen päälohkoon: rakentamisesta ja hankkeen käytöstä johtuvat vaikutukset.

Vesivarahankkeet ovat usein suuria taloudellisia resursseja vaativia yhteiskunnan toiminnan perusinvestointeja, joista investoinnit kattavat hyödyt saadaan vasta kymmenien vuosien kuluessa. Talousalueelle, jolla hanke toteutetaan, tuottaa jo rakentaminen usein merkittävää taloudellista hyötyä ja samalla tämä hanke mahdollisesti syrjäyttää jonkin vaihtoehtoisen muulla alueella suoritettavan rakentamistyön. Toisaalta rakentamisesta aina seuraa jonkin luonnonvaran väheneminen tai muuttuminen.

Hyöty hankkeen käytöstä muodostuu vesistön käyttömuotojen ja rannan maankäytön kautta. Edelleen näistä seuraa positiivisiksi katsottavia vaikutuksia muuhun taloudelliseen toimintaan. Lähes aina on tilanne kuitenkin sellainen, että toteutettava hanke edistää eräitä käyttömuotoja, mutta vaikuttaa haitallisesti eräisiin muihin, jolloin nämä on otettava vahinkoina huomioon.

Vesivarojen käytön kokonaissuunnittelu ja erillisten laaja-alaisten vesivaroihin kohdistuvien hankkeiden suunnittelu tulisi suorittaa yhteiskuntataloudelliselta pohjalta. Toisin sanoen toteutusvaihtoehtojen edullisuusvertailussa ja toteutuksen kannattavuusarvioinnissa tulisi ottaa kaikki positiiviset ja negatiiviset vaikutukset huomioon. Tämän selvittäminen edellyttää, että tunnetaan ne tekijät, joista yhteiskunnan hyvinvointi muodostuu ja kuinka ko. hanke näihin tekijöihin vaikuttaa. Lisäksi on tiedettävä, kuinka hyvinvoinnin muutos, hyöty tai vahinko, on näistä tunnetuista tekijöistä laskettavissa.

Tällaisen yhteiskunnan hyvinvointifunktion konstruoiminen on käytännössä tuottanut ylivoimaisia ongelmia johtuen sekä vaikeuksista muuttaa eriaikaiset vaikutukset samaan vertailuajankohtaan että eräiden samanaikais-

ten vaikutusten heikosta keskinäisestä vertailtavuudesta. Useille hyvinvointiin vaikuttaville hyödykkeille on muodostunut ne keskenään vertailukelpoiseksi tekevä hinta, mutta esim. useat julkisten palvelusten hinnat määräytyvät oleellisesti muuten kuin kysyntä-tarjontasuhteiden perusteella. Samoin fyysisen ympäristön ominaisuudet siinä muodostavat sellaisen hyvinvointia määräävän tekijäryhmän, jonka merkityksen arvioiminen on varsin ongelmallista.

Sekä yleisessä koko yhteiskunnan hyvinvoinnin ja sen muutosten arvioinnissa että erillisten projektien edullisuusarvioinnissa voidaan käyttää kahta päälähestymistapaa. Ensinnäkin voidaan luopua varsinaisen taloudellisen mittayksikön, rahan, käytöstä vaikutusten mittaamiseen ja arvioida suoraan havaittujen tai ennakoitujen ja mahdollisesti fyysisin mitoin kvantifioitujen vaikutusten merkitys hyvinvoinnin lisäämisessä. Toinen tapa on tukeutua liikeloudellisiin ja kansantaloudellisiin arvoihin ja ottaa aineettomat, rahassa vaikeasti arvioitavat, vaikutukset lisänäkökohtina huomioon. Jälkimmäinen on ko. tavoista käytetympi menettelytapa.

Ajan käsittely tuo vaikutusten arviointiin merkittäviä ongelmia. Ei tiedä muuttuvatko vesistön käyttötarpeet oletetulla tavalla ja kuinka eriaikaiset vaikutukset muutetaan samaan vertailuajankohtaan. Edellisestä johtuu, että vaikka ko. hanke teknisessä suhteessa olisi käyttökelpoinen hyvinkin monia vuosikymmeniä niin se muista syistä voi käydä tarpeettomaksi huomattavasti sitä ennen.

Toteutuksen oikealla ajoituksella voidaan saavuttaa huomattavia säästöjä vertailuajankohtaan diskontatuissa kustannuksissa. Tällöin tulee tapauskohtaisesti harkittavaksi, missä määrin hankkeen laajuutta on mahdollista asteittain lisätä kasvavaa käyttötarvetta vastaavaksi.

Eriaikaisten vaikutusten muuttaminen samaan vertailuajankohtaan tapahtuu valitun korkokannan avulla. Korkokannan määräytymisessä on perimmältään kysymys siitä, kuinka arvostetaan eri ajankohtina olevia kulutusmahdollisuuksia. Yleisesti katsotaan, että tämä aikapreferenssi suosii yksilöillä selvästi enemmän nykyhetken kulutusta kuin koko yhteiskunnan

toiminnan jatkuvuuden ja kehityksen kannalta on järkevää. Tällöin yksilöiden arvostuksesta johdettu korkokanta olisi selvästi korkeampi kuin yhteiskunnan. Vaikka onkin kehitetty menetelmiä eräiden "oikeiden" korkokantojen määrittämiseksi, ei tällainen tule yleensä erillisen hankkeen vaikutusten arvioinnissa kyseeseen, vaan käytetään valtiovallan hyväksymiä ohjeellisia korkokantoja, jotka voivat olla erisuuria erityyppisille investoinneille.

Taloudellisten arvioiden eräänä tehtävänä on selvittää tarvittavien uhrausten ja saatavien hyötyjen määrä intressipiiri- tai talousyksikkökohtaisesti. Näitä arvioita tarvitaan hankkeen toteutuvuuden ja kannattavuuden selvittämiseksi ja myös eräiden lakimääräisten arvioiden suorittamiseksi. Hankkeen toteutuminen edellyttää että kyseeseen tulevilla intressenteillä on ensinnäkin riittävät taloudelliset voimavarat hankkeen suorittamiseksi ja toiseksi, että saatavat hyödyt ovat riittävät uhrauksiin verrattuina.

Koska vesivaroihin kohdistuvat hankkeet palvelevat osaltaan yhteiskunnan elinkeino-, sosiaali- ja aluepoliittisia päämääriä tai pyrkimyksiä, tulisi laajoissa hankkeissa ottaa vaikutusten arvioinnissa nämä seikat huomioon. Vesien käyttöä koskeva lainsäädäntö määrää myös eräiden arvioiden suorittamistavan. Näillä ei kuitenkaan (Suomessa) pyritä selvittämään hankkeen yksityis- tai yleistaloudellista kannattavuutta, vaan lähinnä vesiä koskevien intressien oikeudellista järjestelyä ja toteuttamiseen liittyviä rahoituskysymyksiä.

Parhaan ratkaisun löytämiseksi voidaan käyttää useita menetelmiä, jotka eroavat toisistaan pääasiassa ratkaisuvaihtoehtojen laadinnan ja matemaattisen käsittelytavan suhteen. Käytetyt optimointi- ja vertailutavat ryhmitetään tavallisimmin seuraavasti:

1. kustannushyötyanalyysi, 2. matemaattinen optimointi, 3. simulointi.

Kustannushyötyanalyysi tarkoittaa hankkeen tai toimenpiteen toteuttamiseen vaadittavien uhrausten ja toteuttamisesta johtuvien hyötyjen ja vahinkojen sekä em. tekijöiden välisten suhteiden selvittämistä. Analyysi

voidaan suorittaa halutussa laajuudessa lähtien yksityis- tai liiketaloudellisten puhtaasti rahamääräisinä tapahtuvien tulojen ja maksujen vertailusta aina koko yhteiskuntaan kohdistuvien taloudellisten ja muiden vaikutusten analysointiin.

Yhteiskunnallinen kustannushyötyanalyysi on pikemminkin tietty tarkastelutapa kuin määritelty laskentatekniikka. Ominaista sille on tarkastelun laaja-alaisuus; kaikki positiiviset ja negatiiviset vaikutukset pyritään ottamaan samassa analyysissä huomioon. Tarkastelun kohteena olevat ratkaisut on täytynyt tuottaa ennen analyysia tai analyysi etenee vaiheittain.

Matemaattisessa optimoinnissa on keskeisenä tehtävänä tuotantofunktion määrittäminen. Tämä kuvaa sitä yhteyttä, joka vallitsee suoritettujen uhrausten, hankkeen fyysisen laajuuden ja saatavien hyötyjen välillä. Optimi voidaan hakea graafisesti, analyttisesti tai numeerisesti. Oleellista on, että on muodostettu yksiselitteinen optimikriteeri, joka viime kädessä on pystyttävä lausumaan funktiona käytetyistä uhrauksista. Monimutkaisten ongelmien ratkaisuun kehitettyjä tekniikkoja ovat lineaarinen ja dynaaminen optimointi.

Simulointi ei ole varsinainen optimointimenetelmä vaan paremminkin tekniikka tuottaa nopeasti suuri joukko erilaisia ratkaisuja ja tutkia tarkasteltavan systeemin käyttäytymistä erilaisissa tilanteissa. Kysymyksessä on lähinnä hyväksyttävien ratkaisutapojen löytäminen, joihin voidaan myös luotettavasti päästä, elleivät käytetyt kriteerit ole erityisen herkkiä systeemin tilaa kuvaavien parametrien muutoksille. Simulointi on käyttökelpoisin menetelmä silloin, kun tarkasteltavan systeemin matemaattisen mallin muuttujat eivät ole deterministisiä, mutta niillä on tunnettu tilastollinen jakauma ja kun malli on liian monimutkainen käsiteltäväksi muilla optimointimenetelmillä. Simulointia sekä lineaarista ja dynaamista ohjelmointia käsitellään tarkemmin myöhemmin tässä esityksessä.

Vesivaroja koskevan hankkeen suunnittelun ja optimoinnin yhteydessä puhutaan usein systeemianalyysin soveltamisesta. Tällöin tarkoitetaan, että tarkasteltava osa luonnosta sekä taloudellisesta ja sosiaalisesta toimintaympäristöstä jaetaan valitulla tarkkuudella toiminnallisiin yksiköihin ja tämän rajatun reaalimaailman osan rakennetta ja toimintaa kuvataan käsitteellisellä tasolla. Parhaassa tapauksessa tällaisesta reaalisysteemistä on muodostettavissa matemaattinen malli. Tämä on kuitenkin aina reaalisysteemin yksinkertaistettu kuvaus ja mallia muodostettaessa on tehtävä valintaa kuvaustarkkuuden ja mallin käytön helpouden välillä. Yleensä tilanne on sellainen, että perustietojen puutteellisuudesta johtuen tai muusta syystä joudutaan tekemään varsin suuria yksinkertaistuksia. Joka tapauksessa tarkasteltavan systeemin toiminnan selvittäminen kuuluu oleellisena osana suunnitteluun. Jo pelkästään suunnittelun jako osatehtäviin vaatii tätä.

Kustannushyötyanalyysia voidaan myös pitää eräänä systeemianalyysin muotona. Tarkastelukohteena on tällöin taloudellisen ja sosiaalisen toiminnan alue. Koska laajoissa vesivarahankkeissa ovat optimin kriteerit viime kädessä löydettävissä juuri tältä alueelta, voidaan sanoa, että kustannushyötyanalyysi kuuluu osana myös muihin optimointimenetelmiin. Ero on lähinnä siinä, minkätyyppisiin ongelmiin haetaan ratkaisua. Matemaattisessa optimoinnissa ja simuloinnissa tässä yhteydessä on kustannusten, hyötyjen ja vahinkojen arvioimiseen liittyvät vaikeudet jo ratkaistu ja painotus on fyysisen ympäristön, teknisten toimenpiteiden ja taloudellisen toiminnan välisissä vuorovaikutuksissa tai pelkästään luonnon toiminnassa.

Taloudellisten vaikutusten tarkastelu kustannushyötyanalyysissa jaetaan tavanomaisesti neljään vaiheeseen tai osaongelmaan, jotka ovat:

1. laajuusongelma, 2. mittausongelma, 3. arvostusongelma, 4. jakamisongelma.

Tietyn projektin, hankkeen, kannalta tarkastellen on laajuusongelmassa kysymys siitä mitkä vaikutukset otetaan huomioon ja kuinka nämä ryhmi-

tellään. Tarkastelussa käytetään yleensä seuraavia jaotteluja:

1. sisäiset - ulkoiset vaikutukset
2. ensisijaiset - toissijaiset - liitännäis- ja aineettomat vaikutukset

Edellisen jaottelun päätehtävä on liike- ja yhteiskuntataloudellisten kustannusten ja hyötyjen eron syiden selvittäminen. Vesistöhankeeseen toteutuksessa syntyy yleensä sellaisia ulkoisia vaikutuksia, jotka eivät millään tavoin vaikuta ko. hankkeen tai yrityksen talouteen. Tämä ulkoiset vaikutukset voidaan jakaa kahteen osaan

1. fyysiset ulkoiset vaikutukset
2. ulkoiset hintavaikutukset

Edelliset johtuvat joko välittömästi hankkeen toteutuksesta seuranneesta fyysisen luonnonympäristön muutoksista ja kohdistuvat muille talousyksiköille kuin projektin toteuttajalle tai välillisesti taloudellisessa toiminnassa tapahtuvina muutoksina.

Ulkoiset hintavaikutukset ovat tavanomaisia laajoissa rakennusprojekteissa, jolloin esim. työvoiman kysyntä nousee ja se kohottaa hintatasoa koko alueella. Fyysisissä suorituksissa tämä ei välttämättä johda muutoksiin ja joka tapauksessa on vaikea sanoa ovatko muutokset arvosettava positiivisiksi vai negatiivisiksi.

Kustannusten ja hyötyjen yksityiskohtaisessa laskennassa käytetään jälkimmäistä jaottelutapaa:

- ensisijaiset hyödyt tarkoittavat hankkeen välittöminä tuloksina syntyvien hyödykkeiden arvoa
- ensisijaiset kustannukset ovat hankkeen yhteiskunnallisia rakentamis- ja käyttökustannuksia
- toissijaiset hyödyt ovat hankkeen välillisesti aiheuttamia ja tulevat muille kuin ensisijaisten hyötyjen saajille. Esimerkiksi tulvasuojelusuojelustelyn mahdollistama maataloustuotannon nousu voi tehdä mahdolliseksi uuden maataloustuotteiden jalostusyrityksen sijoittamisen alueelle

- toissijaiset kustannukset ovat toissijaisten hyötyjen saamiseksi uhrattava kustannuksia
- liitännäiskustannuksilla tarkoitetaan kustannuksia, jotka tarvitaan perusprojektin toteuttamisen lisäksi ensisijaisten hyötyjen saamiseksi ja joutuvat näiden hyödynsaajien kannettaviksi
- aineettomina vaikutuksina tulevat kyseeseen mm. maisema- ja luonnonsuojelunäkökohdat, hankkeen tulonjakovaikutukset ja turvallisuusnäkökohdat.

Mittausongelmalla tarkoitetaan mittaustason valintaa ts. millä asteikko-tyypillä mittauskohde, tarkasteltava vaikutus, on mitattavissa. Käytävissä olevat mittaustasot tai mittauksen perusasteikot ovat seuraavat: nominaali- eli luokitteluasteikko, kardinaali- eli järjestyksasteikko, intervalli- eli välimatka-asteikko ja suhdeasteikko. Kaksi ensinmainittua ovat luonteeltaan kvalitatiivisia ja jälkimmäiset kvantitatiivisia. Toisin sanoen ensinmainitussa tapauksessa on kysymys subjektiivisten arvostusten esittämistavasta ja jälkimmäisessä varsinaisesta fyysisin tai taloudellisin yksiköin tapahtuvasta mittauksesta. Intervalli- ja suhdeasteikko eroavat toisistaan vain siinä, että edellisessä on nollapiste sopimuksenvarainen ja jälkimmäisessä tapauksessa nollapiste on valittu vastaamaan tarkasteltavan ominaisuuden absoluuttista nollapistettä.

Arvostusongelmassa on kysymys uhrausten ja hyötyvaikutusten hinnoittamisesta. Ongelmallisimpia ovat yleensä seuraavat seikat:

- aineettomat vaikutukset
- liiketaloudellisten ja yhteiskunnallisten kustannusten ja hyötyjen ero
- korkokanta

Aineettomien vaikutusten rahallista arvostusta voidaan selvittää maksuhalukkuustiedusteluin sekä selvittämällä poliittisessa ja yksilöllisessä päätöksenteossa ja valinnassa niille annettavaa arvostusta.

Liiketaloudellisten ja yhteiskunnallisten kustannusten ja hyötyjen ero johtuu ensi sijassa hankkeen toteutuksesta ja käytöstä johtuvista ulkoisista vaikutuksista. Jos nämä vaikutukset on rajattu ja kvantifioitu jo

edellä, on kyseessä enää näiden hinnoittelu.

Tavanomaisesti kustannusten ja hyötyjen arvostus suoritetaan seuraavasti. Kustannukset arvostetaan panostekijöiden käytön yhteiskunnallisten vaihtoehtoiskustannusten perusteella. Nämä panostekijöiden varjohinnat saattavat ääritapauksessa olla nolliä. Hyödyt arvioidaan lisäämällä markkinahintaan kuluttajain ylijäämä.

Eriaikaisten vaikutusten muuttamisessa samaan vertailuajankohtaan tulee suorittaa käytettävän korkokannan valinta. Yleisenä piirteenä on, että pienet laskentakorkokannat suosivat suuria perusinvestointeja, jos vastaavasti käyttökustannukset ovat pienemmät, ja suurilla korkokannoilla on päinvastainen vaikutus.

Jakamisongelma muodostuu kahdesta osasta:

- kohdistamisongelma
- jaksotusongelma

Kohdistamisongelmassa on ensisijaisesti kysymys siitä, mille intressiryhmille, talousyksiköille, toiminnoille tai käyttömuodoille hyödyt ja vahingot kirjataan. Lisäksi asiaa voidaan tarkastella myös aiheuttamissyyn kannalta, jolloin selvitetään miten vaikutukset johtuvat hankkeen eri osatoimenpiteistä ja -toiminnoista. Periaatteessa kohdistamisongelma ratkaistaan jo edellä laskentateknisten ongelmien kohdalla ja tässä vaiheessa kysymys on enää lähinnä kirjaamisesta ja esittämistavasta.

Jaksotusongelmassa on vastaavasti kysymys vaikutusten jaksottamisesta eri aikaperiodeilla.

Edullisimman toteutusvaihtoehdon valintaan on käytettävissä useita valintakriteereitä, joiden käyttökelpoisuus riippuu vallitsevasta päätöksentekotilanteesta. Taloudellisessa suhteessa voidaan nämä tilanteet jakaa kolmeen pääryhmään:

1. Toimenpiteestä saatava hyöty on kaikille vaihtoehdoille sama
2. Suoritettavat uhraukset, erityisesti perusinvestoinnit ovat kaikille vaihtoehdoille samat
3. Hankkeen laajuus voi vaihdella ja hyödyt ja kustannukset muuttuvat laajuudesta riippuen

Ensinmainitussa tapauksessa valinta perustuu kustannusten minimointiin, seuraavassa vastaavasti hyötyjen maksimointiin. Yleensä kuitenkin kyseessä on kolmanteen ryhmään kuuluva tapaus, jolloin valintakriteeri muodostuu kustannusten ja hyötyjen välisistä suhteista. Tavallisimmin käytetyt kriteerit ovat hyötyjen ja kustannusten eron maksimi, hyötyjen ja kustannusten suhteen maksimi ja sisäisen korkokannan maksimi. Kustannusten ja hyötyjen osalta voivat kyseeseen tulla sekä keskimääräiset vuotuisarvot että rakentamishetkeen diskontatut kokonaisarvot. Lisäksi vertailu voidaan suorittaa joko brutto- tai nettoperiaatteella ts. edellisessä vuotuiset kustannukset lisätään hankintamenoon ja jälkimmäisessä vähennetään vuotuisista hyödyistä.

Riippuen käytetystä korkokannasta sekä hankintamenon, vuotuisten hyötyjen ja vuotuisten kustannusten välisistä suhteista voivat eri kriteerit antaa tutkituille toteutusvaihtoehdoille erilaisen paremmuusjärjestyksen. Kuitenkaan ei mitään kriteeriä voi yleisesti pitää toisia huonompana tai parempana. Lisäperusteita valinnalle voidaan hakea esim. siitä missä määrin käytettävissä oleville resursseille on kysyntää muihin tarkoituksiin.

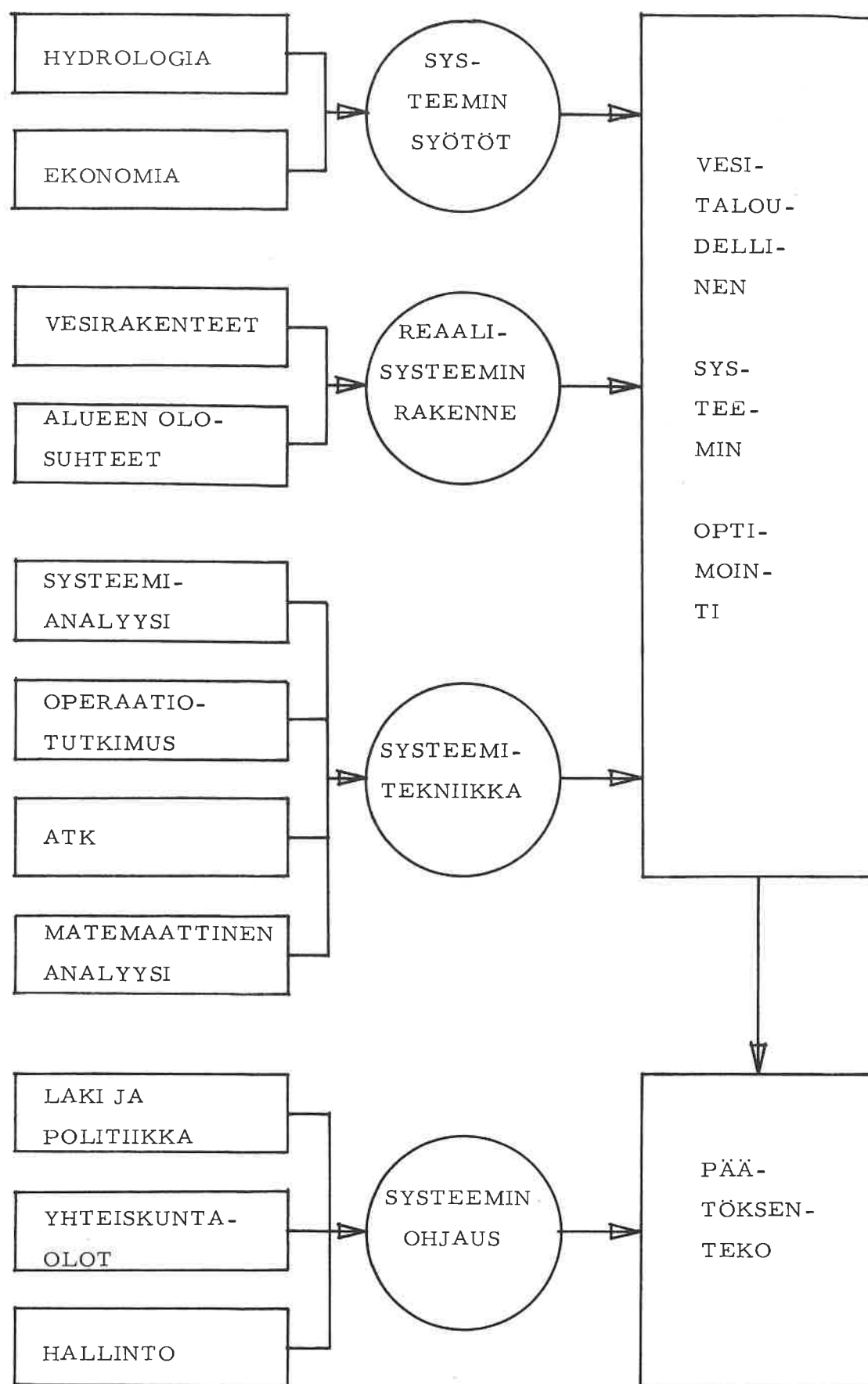
Esitetyt valintakriteerit soveltuvat aivan samoin myös matemaattiseen optimointiin ja simulointiin. Edellisessä tapauksessa valintakriteeristä muodostetaan tehtävän kohdefunktio ja lausutaan tämä mallin päätösmuuttujien ja rajoitusten avulla ja haetaan tämän kohdefunktion maksimi (tai minimi), joka on samalla tehtävän ratkaisu. Simuloinnissa voidaan vastaavasti tarkastella millaisia arvoja valintakriteerit saavat erilaisilla ratkaisutavoilla.

Yhteenvedona voidaan todeta, että suunnittelu voi tapahtua ja yleensä tapahtuu yhdistelmänä erilaisista menetelmistä, joiden valinta riippuu tehtävän luonteesta, käytettävissä olevista perustiedoista, henkisistä resursseista ja käytettävissä olevasta laskentakapasiteetista. Erityisesti lineaarinen ja dynaaminen optimointi sekä simulointi on kehitetty tietokoneita hyväksikäyttäviksi suunnittelu- ja optimointivälineiksi, kun taas yhteiskunnallinen kustannushyötyanalyysi on perustaltaan käsityöläismäistä. Se antaa tilaa tai luo kehykset subjektiivisten valintojen ja arvostusten sijoittamiselle analyysiin ja soveltuu täten parhaiten ylemmän päätöksenteon apuvälineeksi erityyppisten valmiiden projekti-ehdotusten keskinäisessä vertailussa.

Kustannushyötyanalyysia on Suomessa perinteellisesti käytetty jo vuosikymmeniä erilaisten vesitaloudellisten hankkeiden kannattavuusarvioinnissa. Tällöin kuitenkin yleensä on pitäyditty hankkeen välittömien taloudellisten, rahassa mitattavien uhrausten ja hyötyjen vertailuun. Em. muut vaikutukset ovat jääneet systemaattisen tarkastelun ulkopuolelle, koska ongelmien laaja-alaisuudesta johtuen ei ole pystytty muodostamaan selvää metodiikkaa arviointien suorittamiseksi. Toisaalta vesivarojen käytön kokonaissuunnittelua, johon yhteiskunnallinen kustannushyötyanalyysi on erityisen sovelias, on Suomessa suoritettu vasta muutaman vuoden ajan.

Kokonaisuudessaan päätöksenteon pohjaksi tarvittava suunnittelu, vaikutusten arviointi, perustietojen hankinta ja ennusteiden laadinta vaativat hyvin monipuolista asiantuntemusta. Tilannetta esittää kuva 1.3.

Tietokoneita hyväksikäyttäviä matemaattista optimointia ja simulointia, jotka parhaiten soveltuvat vesivarojen yleis- ja hankesuunnittelutasolle, on erityisesti USA:ssa sovellettu vesivaroja koskevaan suunnitteluun jo runsaan kymmenen vuoden ajan. Suomessa ko. menetelmien selvitytyö vesitekniikan alalla on alkanut kuluvan vuosikymmenen alkupuolella ja kohdistunut vesi- ja viemärilaitosten suunnitteluun. Jäljempänä tässä esityksessä käsitellään kyseisiä menetelmiä, niissä käytettäviä laskentatekniikkoja ja menetelmien soveltuvuutta vesivarojen käytön suunnitteluun.



Kuva 1.3. Vesitaloudellisen suunnittelun systeemitarkastelu

2. Matemaattisen optimoinnin tehtävä

Matemaattisen optimoinnin tehtävä voidaan lausua seuraavasti: Luvuille $x_1, x_2, \dots, x_n$ on valittava sellaiset arvot, että funktio $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ saa maksimin, kun rajoitusehdot

$$(2.1) \quad \begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0 \end{aligned}$$

ovat voimassa.

Lukuja $x_1, x_2, \dots, x_n$ kutsutaan tehtävän muuttujiksi tai päätösmuuttujiksi, ja n on muuttujien lukumäärä. Maksimoitavaa funktiota $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kutsutaan kohdefunktioksi tai objektifunktioksi. Matemaattisen optimoinnin tehtävässä voi vaatimuksena olla myös kohdefunktion minimointi. Tämä voidaan haluttaessa palauttaa maksimointitehtäväksi korvaamalla kohdefunktio funktiolla $-f(x_1, \dots, x_n)$. Ehtoja (2.1) kutsutaan rajoitusehdoiksi tai rajoitusepäyhtälöiksi. Matemaattisen optimoinnin tehtävässä voi rajoitusehtona olla myös yhtälörajoitus

$$(2.2) \quad g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Tämä voidaan haluttaessa palauttaa muotoon (2.1) korvaamalla (2.2) epäyhtälörajoituksilla

$$(2.3) \quad \begin{aligned} g(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0 \\ -g(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0. \end{aligned}$$

Esimerkki: Maksimoitava $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ siten että rajoitukset $|x_1| \leq 1$ ja $2x_2^2 + x_3^2 \leq 2$ ovat voimassa.

Nyt

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

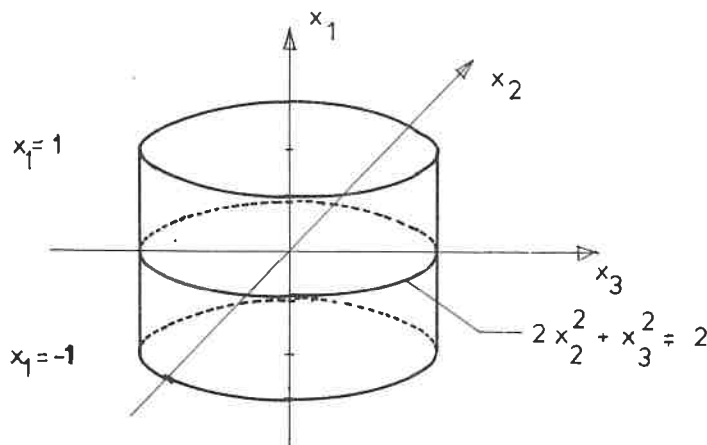
ja

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 1 \leq 0$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = -x_1 - 1 \leq 0$$

$$g_3(x_1, x_2, x_3) = 2x_2^2 + x_3^2 - 2 \leq 0$$

Muuttujien $x_1, x_2, \dots, x_n$ sellaisten arvojen joukkoa, jotka toteuttavat tehtävän rajoitukset, kutsutaan sallituksi alueeksi. Kuva 2.1 esittää edellisen esimerkin sallittua aluetta.



Kuva 2.1. Optimointitehtävän sallittu alue

Sallittu alue on elliptinen sylinteri, jonka vaipan määrittelee yhtälö $2x_2^2 + x_3^2 = 2$ ja jonka päätyjä rajoittavat tasot $x_1 = 1$ ja $x_1 = -1$. Maksimoitaessa tulee siis kysymykseen ainoastaan sellaiset muuttujien arvot, jotka kuuluvat sallittuun alueeseen.

Useimmiten sekä kohdefunktio että rajoitusehdot on annettu analyyttisinä lausekkeina.

Muotoa

$$(2.4) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

olevia kohdefunktioita kutsutaan lineaarisiksi, muita kohdefunktioita epälineaarisiksi. Yhtälössä (2.4) $a_1, a_2, \dots, a_n$ ovat tunnettuja vakiota.

Samoin muotoa

$$(2.5) \quad g(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n - b \leq 0$$

olevia rajoitusehtoja kutsutaan lineaarisiksi ja muuntyyppisiä rajoitusehtoja epälineaarisiksi.

Tehtävät joissa ei ole ollenkaan rajoituksia ovat oleellisesti helpompia ratkaista kuin rajoitusehtoja sisältävät tehtävät. Lineaarisia rajoitusehtoja on helpompi käsitellä kuin epälineaarisia, ja erityisen miellyttäviä ovat muotoa

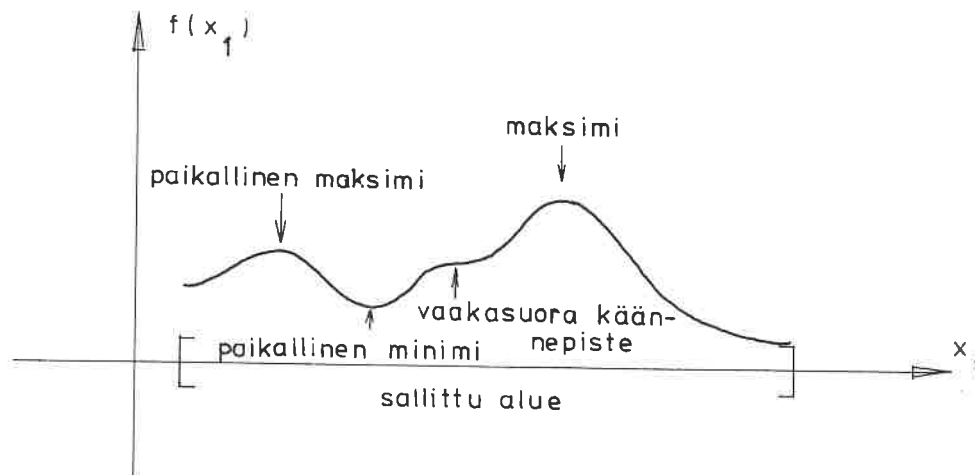
$$(2.6) \quad x_i \leq b_i$$

olevat rajoitusehdot. Useat likimääräiset ratkaisumenetelmät perustuvatkin siihen, että rajoitusehdot joko sisällytetään kohdefunktioon (sakkofunktiot, Lagrangen kertojat yhtälörajoituksille) tai korvataan tyyppiä (2.6) olevilla rajoitusehdoilla (Lagrangen kertojat epäyhtälörajoituksille). Lineaarisia kohdefunktioita on samoin helpompi käsitellä kuin epälineaarisia kohdefunktioita.

Jos kohdefunktio saa sallitulla alueella mielivaltaisen suuria arvoja, ei optimointitehtävällä luonnollisesti ole ratkaisua. Samoin on asian laita, jos sallittu alue on tyhjä, jolloin rajoitusehdot ovat mahdottomat täyttää.

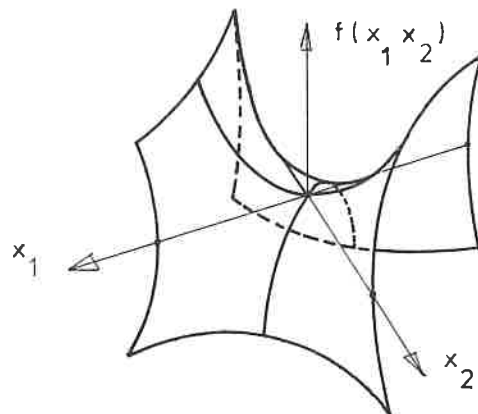
Kohdefunktiolla on pisteessä $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ maksimi, mikäli se tämän pisteen ulkopuolella saa vain pienempiä (tai yhtä suuria) arvoja kuin k.o. pisteessä. Jos kohdefunktio on kaikkien muuttujiensa

suhteen derivoituva, ovat osittaisderivaatat maksimipisteessä nolliä. Paitsi maksimipisteessä ne ovat nolliä myös jokaisessa paikallisessa maksimissa, paikallisessa minimissä sekä jokaisessa n.k. satulapisteessä. Kuva 2.2 esittää mahdollista kohdefunktion kuvaajaa, kun muutujia on vain yksi.



Kuva 2.2. Kohdefunktion mahdollisia erikoispisteitä

Kuvaan on merkitty kaikki pisteet, joissa derivaatta on nolla. Yksinkertaisin esimerkki satulapisteestä on origo funktiolla $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, joka on esitetty kuvassa 2.3



Kuva 2.3. Esimerkki satulapisteistä

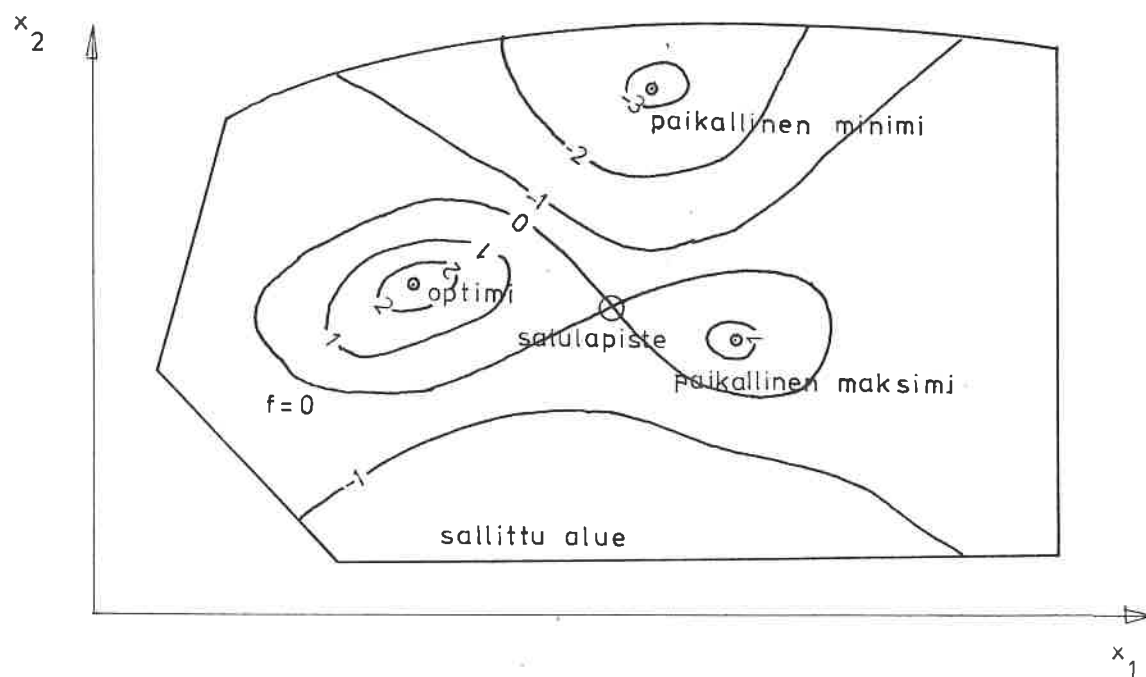
Eräs keino optimointitehtävän ratkaisemiseksi on etsiä ne päätösmuuttujien arvot, joilla kohdefunktion kaikki osittaisderivaatat ovat nollia. Tällaisista pisteistä olisi voitava päätellä, onko kysymyksessä paikallinen ääriarvo, satulapiste vai todellinen maksimi. Jos kohdefunktiolla on olemassa useammankertaiset osittaisderivaatat, näiden arvot voidaan laskea tutkittavassa pisteessä, ja pisteen laatu¹⁾ voidaan näiden avulla määrittää. Useimmiten kuitenkin osittaisderivaattojen määrääminen, samoin kuin niiden arvojen käyttäminen tutkittavan pisteen laadun määrittämiseksi, on hankalaa. Näin on sitä selvemmin, mitä useampia muuttujia tehtävässä on. Käytännön optimointiongelman kohteena on aina käytännön systeemi, jonka käyttäytymisestä suunnittelijalla on jonkinlainen intuitiivinen kuva. Tätä näkemystä sekä fysikaalisia perusteita käyttämällä ääriarvon laadun määrääminen käy parhaiten päinsä.

Jos onnistutaan löytämään kaikki ne pisteet, joissa osittaisderivaatat ovat nollia, ei edellä kuvattuja ongelmia tietenkään ole. Todellinen optimi tutkittavista pisteistä on se, jossa kohdefunktion arvo on suurin.

Tavallisesti kuitenkin osittaisderivaatat nollaksi tekeviä pisteitä on vaikea löytää, ja niiden laatu on näin ollen kyettävä päättelemään sitä mukaa kuin niitä löytyy.

Niiden sallitun alueen pisteiden joukkoa, joissa kohdefunktio saa vakioarvon, kutsutaan tähän arvoon liittyväksi tasa-arvokäyräksi. Kun muuttujia on vain kaksi, on kohdefunktion käyttäytymistä helppo visualisoida tasa-arvokäyrien avulla. Useat monen muuttujan tehtävien erikoispiirteet tulevat esille jo kahden muuttujan tapauksessa, joten tasa-arvokäyrillä on yleisempääkin käyttöä. Kuvassa 2.4 on esimerkki kohdefunktion tasa-arvokäyristä sekä eräistä erikoispisteistä.

- 1) Varsinaisesti osittaisderivaattojen avulla voidaan erottaa vain satulapisteet ääriarvopisteistä. Todellisen maksimin erottaminen paikallisista ääriarvoista ei sen sijaan osittaisderivaattojen avulla ole mahdollista.



Kuva 2.4. Kahden muuttujan kohdefunktion esittäminen tasa-arvokäyrien avulla

3. Matemaattinen malli, kohdefunktio

Matemaattisen optimoinnin tehtävä lausuttiin edellisessä luvussa seuraavasti: Muuttujille $x_1, x_2, \dots, x_n$ on valittava sellaiset arvot, että kohdefunktio $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ saa maksimin, kun rajoitusehdot

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$$

$$\vdots$$

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$$

ovat voimassa. Kun johonkin vesivarojen suunnittelutehtävään halutaan soveltaa matemaattisen optimoinnin menetelmiä, on tehtävälle määriteltävä muuttujat sekä laadittava kohdefunktio ja rajoitusehdot. Tätä tarkoitusta varten tutkittavalle systeemille on laadittava matemaattinen malli.

Matemaattista mallia muodostettaessa valitaan ensin ne parametrit, jotka ovat tehtävän kannalta oleelliset. Tällaisia ovat ensinnäkin ne parametrit, jotka ovat vapaasti kontrolloitavissa, ja joiden kontrollointi parhaalla mahdollisella tavalla juuri muodostaa suunnittelijan ongelman. Nämä parametrit ovat muodostettavan optimointitehtävän päätösmuuttujat. Vesistön säännöstelytehtävässä tällainen parametri on juoksutuksen suuruus. Muita huomioonotettavia parametrejä ovat sellaiset, joita ei voi suoraan kontrolloida, mutta joiden arvoihin päätösmuuttujien arvot vaikuttavat, ja jotka tulevat mukaan päätösmuuttujilla toteutetun kontrollipolitiikan hyötyä arvioitaessa. Näitä parametrejä kutsutaan tilamuuttujiksi ja säännöstelytehtävässä tällainen muuttuja on mm. säännöstelyaltaan vedenkorkeus. Kolmannen ryhmän muodostavat sellaisia satunnaisia tekijöitä kuvaavat parametrit, joita ei voi ollenkaan kontrolloida, ja joiden arvot eivät siis riipu päätösmuuttujien arvoista. Näitä kutsutaan stokastisiksi parametreiksi. Säännöstelyssä tällaisia parametrejä ovat esim. sadanta, haihdunta ja tulovirtaama. Neljännen ja viimeisen parametriryhmän muodostavat systeemiin liittyvät fysikaaliset vakiot, jollaisia ovat esim. altaan pinta-ala, säännöstelypadon purkautumiskyky jne.

Matemaattisessa mallissa lausutaan toisen ryhmän parametrit (tilamuuttujat) ensimmäisen, kolmannen ja neljännen ryhmän parametrien avulla, käyttäen hyväksi parametrien välisiä fysikaalisia riippuvuuksia. Stokastisten parametrien käsittelyssä käytetään hyväksi näistä parametreista tehtyjä havaintosarjoja. Tavallisesti stokastiset parametrit voidaan korvata havaintosarjoista lasketuilla keskiarvoilla. Stokastisia tekijöitä käsitellään tarkemmin luvussa 8.

Parametreilla on yleensä voimassa joitakin rajoituksia. Nämä joko johtuvat fysikaalisista syistä (esim. vettä ei voi ottaa enempää kuin sitä on) tai ovat suunnittelijan asettamia (esim. järven pinnan korkeus halutaan pitää tiettyjen rajojen sisäpuolella). Nämä parametreilta vaadittavat rajoitukset otetaan myös mukaan malliin.

Seuraava yksinkertainen esimerkki valaissee tilannetta. Kastelualtaasta, jonka pinta-ala on A , lähtee kaksi juoksutuskanavaa, joiden virtaamaa voidaan kontrolloida. Systeemistä halutaan muodostaa matemaattinen malli, joka kuvaa altaan pinnan korkeutta tietyn mittaisen toimintajakson lopussa. Jakson alussa altaan pinnan korkeus on h_o , ja Q_{tulo} on tulovirtaama jakson aikana.

Ensimmäiseen parametriryhmään kuuluvat jakson aikana juoksutettavat vesimäärät Q_1 ja Q_2 , ne ovat vapaasti kontrolloitavissa. Toiseen ryhmään (tilamuuttujiin) kuuluu tässä esimerkissä vain altaan pinnan korkeus jakson lopussa, h . Sen arvo riippuu arvoista Q_{tulo} , Q_1 , Q_2 ja h_o . Stokastisten parametrien ryhmään kuuluu tulovirtaama Q_{tulo} , ja neljänteen ryhmään fysikaaliset vakiot A ja h_o .

Tilamuuttuja h lausutaan nyt muiden ryhmien parametrien avulla:

$$(3.1) \quad h = h_o - \frac{1}{A} (Q_1 + Q_2 - Q_{tulo})$$

Stokastinen parametri Q_{tulo} korvataan seuraavaksi aikaisemmilta vuosilta tehtyjen havaintojen keskiarvolla $\bar{Q}_{tulo}$, jolloin

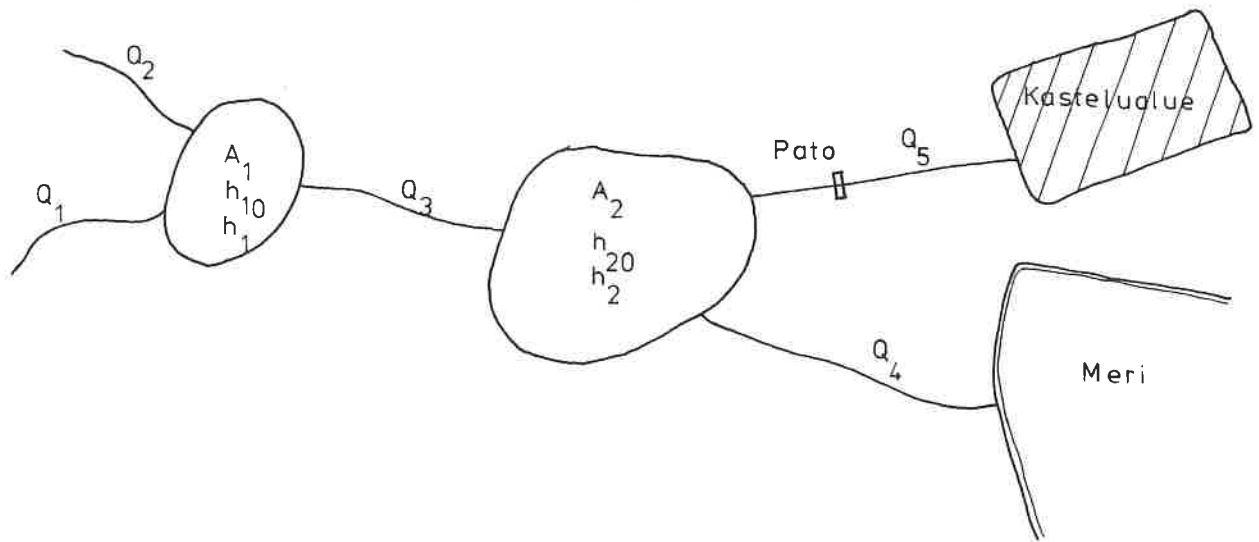
$$(3.2) \quad h = h_o - \frac{1}{A} (Q_1 + Q_2 - \bar{Q}_{tulo})$$

Altaan matemaattiseen malliin kuuluu vielä fysikaalisista syistä ilmeiset rajoitukset

$$(3.3) \quad Q_1 \geq 0, \quad Q_2 \geq 0 \quad \text{ja} \quad h \geq h_{\min}$$

Matemaattisen mallin muoto riippuu paljon siitä, mitä suureita kysymyksessä olevasta systeemistä halutaan kuvata. Jos esimerkiksi edellä olisi haluttu kuvata mallilla paitsi altaan pinnan korkeutta myös veden lämpötilaa, olisi lisäksi jouduttu käyttämään ainakin lämpötila-, kosteus- ja tuuliennusteita sekä tunnettuja termodynamiikan lakeja. Yleisesti voidaan sanoa, että vesivarojen suunnittelussa tarvittavat matemaattiset mallit ovat useimmiten periaatteeltaan yksinkertaisia, lähes yhtä yksinkertaisia kuin edellä kuvattu esimerkki. Kysymykseen tulevat parametrien väliset riippuvuudet ovat yleensä yhden tai useamman altaan vesitaseyhtälöitä: veden määrän muutos on "se mitä tulee miinus se mitä menee". Mallit voivat olla kuitenkin laajoja (t. s. sisältää suuren määrän parametreja) ja tämän vuoksi hankalasti käsiteltäviä. Stokastiset parametrit voivat joissakin tapauksissa myös tuoda vaikeuksia mukanaan.

Tarkastellaan vielä hieman laajempaa kahden järven muodostamaa systeemiä, kuva 3.1. Tietyn mittaisen toimintajakson alussa ensimmäisen järven pinnan korkeus on h_{10} ja toisen h_{20} , ja toimintajakson lopussa h_1 ja h_2 . Pinta-alat ovat vastaavasti A_1 ja A_2 . Aikaisemmilta vuosilta tehtyjen havaintojen mukaan ensimmäiseen järveen laskevat joet tuovat jakson aikana järveen vettä arviolta määrät $\bar{Q}_1$ ja $\bar{Q}_2$. Järvien välillä kulkevassa joessa jakson aikana virtaava vesimäärä on tunnettu funktio ensimmäisen järven pinnan korkeudesta jakson alussa: $Q_3 = f_1(h_{10})$. Samoin on asian laita mereen laskevan joen kohdalla: $Q_4 = f_2(h_{20})$. Lisäksi järvestä johdetaan vapaasti säädettävä virtaama Q_5 kastelualueelle. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan järvien valuma-alueilta tulevan valunnan tapahtuvan vain em. jokien kautta. Suoraan järviin tulevan sadannan ja niistä tapahtuvan haihdunnan erotuksen keskiarvo pinta-alayksikköä kohden on tehtyjen havaintojen perusteella $\bar{s}$.



Kuva 3.1. Kahden altaan systeemi

Vapaasti kontrolloitavia muuttujia eli päätösmuuttujia on vain yksi, Q_5 . Tilamuuttujia ovat h_1 ja h_2 . Stokastisia parametrejä ovat Q_1 , Q_2 ja s , jotka on mallissa jo korvattu aikaisemmista havainnoista lasketuilla keskiarvoilla $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$ ja $\bar{s}$, ja neljanteen parametriryhmään kuuluvat fysikaaliset vakiot h_{10} , h_{20} , A_1 ja A_2 .

Tehtävänä on nyt lausua h_1 ja h_2 muiden parametrien avulla. Ensimmäisen järven vesitaseyhtälö on

$$(3.4) \quad h_1 = h_{10} + \bar{s} + \frac{1}{A_1} (\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 - Q_3),$$

missä A_1 , h_{10} , $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$ ja $\bar{s}$ tunnetaan, ja

$$(3.5) \quad Q_3 = f_1(h_{10}).$$

Toisen järven vesitaseyhtälö puolestaan on

$$(3.6) \quad h_2 = h_{20} + \bar{s} + \frac{1}{A_2} (Q_3 - Q_4 - Q_5),$$

missä A_2 ja h_{20} tunnetaan,

$$(3.7) \quad Q_4 = f_2(h_{20})$$

ja Q_5 on vapaasti kontrolloitavissa.

Allassysteemin malliin kuuluvat vielä rajoitusehdot

$$Q_5 \geq 0, \quad Q_5 \leq Q_{\max}$$

missä $Q_{\max}$ on maksimimäärä vettä, joka padosta voidaan toimintajakson aikana juoksuttaa.

Edellisissä esimerkeissä tilannetta on tarkasteltu vain jakson alussa ja lopussa, ja kaikki jakson aikana tapahtuva on koottu yhdeksi kokonaisuudeksi. Esimerkit olisi voitu myös laatia jatkuvalle ajalle, jolloin esim. yhtälö (3.2) olisi tullut muotoon

$$h(t) = h(t_0) - \frac{1}{A} \int_{t_0}^t (Q_1(u) + Q_2(u) - \bar{s}(u)) du.$$

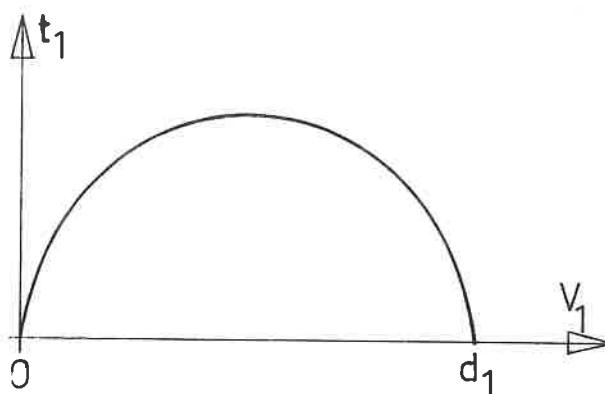
Erityisesti dynaamista ohjelmointia ajatellen tässä on kuitenkin valittu edelläoleva tapa. Esimerkit kuvaavat diskreetoidun ajan yhteen askeleeseen liittyviä tapahtumia.

Seuraavaksi käsitellään kohdefunktion muodostamista. Kun jollekin vesivarojen suunnittelutehtävälle halutaan muodostaa kohdefunktio, joudutaan suorittamaan eri toimenpiteiden vertailua; asettamaan eri toimenpiteet paremmuusjärjestykseen. Joudutaan esimerkiksi pohtimaan, missä suhteissa tietty vesimäärä olisi jaettava eri vedenkäyttäjille, olisiko parempi muuttaa järven vedenkorkeutta kuin pitää se ennallaan jne. Tällaisissa tapauksissa eri vaihtoehtojen vaikutukset on tutkittava ja näiden vaikutusten perusteella saatettava ne yhteismittalaiseen muotoon. Paljon käytetty tapa on mitata vaihtoehtoja rahassa: paras vaihtoehto on se, joka on yhteiskunnalle kokonaistaloudellisesti

edullisin. Eri vaihtoehtojen kokonaistaloudellisen merkityksen määrittäminen on monesti kuitenkin ylivoimainen tehtävä. Tällöin on tyydyttävä tavalla tai toisella yksinkertaistettuun ratkaisuun vaihtoehtojen kokonaistaloudellisen arvon määrittämisessä. Tuloksen hyvyys riippuu sitten suunnittelijan kokemuksesta ja pätevyydestä, hänen "sormituntumastaan" asioihin.

Kun vaihtoehdot on vaikutustensa perusteella jollakin tapaa saatettu yhteismitallisiksi, voidaan niiden hyvyyttä kuvata kohdefunktiolla. Mitä suuremman arvon kohdefunktio jollakin vaihtoehdolla (joka on kohdefunktion argumentti) saa, sitä parempana kyseistä vaihtoehtoa pidetään.

Ongelman matemaattisen mallin termeillä lausuttuna eri toimintavaihtoehdot tarkoittavat tehtävän päätösmuuttujien eri arvoja. Matemaattisen mallin avulla toisen ryhmän parametrit (tilamuuttujat) voidaan lausua ensimmäisen ryhmän parametrien (pätösmuuttujien) avulla. Näin kohdefunktio voidaan lausua pelkästään päätösmuuttujien avulla, ja se ilmoittaa kuhunkin päätösmuuttujien valintaan liittyvän toimintavaihtoehdon arvon. Otetaan yksinkertainen esimerkki kohdefunktion muodos-
tamisesta. Kastelualtaan tilavuus on V , ja siitä on johdettava vettä kahdelle viljelmälle. Näiden pinta-alat ovat A_1 ja A_2 . Edellisen tuotos (kg viljaa/ha) riippuu viljelmälle johdetusta vesimäärästä kokemusten mukaan siten, että



Kuva 3.2. Viljelmän tuotoksen t_1 riippuvuus sille johdetusta vesimäärästä V_1

$$(3.8) \quad t_1 = c_1 v_1 (d_1 - v_1), \quad 0 \leq v_1 \leq d_1,$$

missä t_1 on viljelmän arvioitu tuotos hehtaaria kohden, v_1 hehtaarille johdettu vesimäärä ja c_1 ja d_1 kokemusperäisiä vakioita (Kuva 3.2). Vastaavasti toisen viljelmän tuoton riippuvuutta sille johdetusta vesimäärästä kuvataan yhtälöllä

$$(3.9) \quad t_2 = c_2 v_2 (d_2 - v_2), \quad 0 \leq v_2 \leq d_2.$$

Oletetaan, että edellisen viljelmän sadon katetuotto on r_1 mk/kg ja jälkimmäisen vastaavasti r_2 mk/kg. Toimintavaihtoehtoon " v_1 l/ha vettä edelliselle viljelmälle, v_2 l/ha jälkimmäiselle" hyvyttä tai arvo kuvaa nyt seuraava kohdefunktio:

$$(3.10) \quad f(v_1, v_2) = A_1 r_1 c_1 v_1 (d_1 - v_1) + A_2 r_2 c_2 v_2 (d_2 - v_2).$$

Koska kohdefunktio on jo valmiiksi lausuttu päätösmuuttujien v_1 ja v_2 avulla ei systeemin matemaattista mallia tarvitse käyttää päätösmuuttujista riippuvien tilamuuttujien eliminoimiseen.

Tässä esimerkissä ei kohdefunktion muodostamisessa ollut periaatteellisia vaikeuksia, kunkin toimintapolitiikan rahallinen arvo oli helposti määrättävissä. Käytännön ongelmissa on kuitenkin otettava huomioon hyvin suuri joukko tekijöitä, joiden yhteismitalliseksi saattaminen on mahdotonta (suorat taloudelliset vaikutukset, sosiaaliset vaikutukset, ympäristön- ja luonnonsuojelliset näkökohdat), ja tällöin kohdefunktion muodostaminen on vaikeaa. Toisaalta valittu kohdefunktio juuri määrää parhaan toimintapolitiikan luonteen. Voidaan sanoa, että järkevän kohdefunktion muodostaminen on matemaattista optimointia sovellettaessa kaikkein vaikein ja lopputuloksen kannalta kaikkein herkin vaihe. Hyvän kohdefunktion löytymisestä riippuen ratkaisu on joko onnistunut tai epäonnistunut, ja tähän suunnittelija tarvitsee kokemusta ja ammattitaitoa.

Järkevän kohdefunktion valinnan vaikeudesta johtuvat osaltaan myös ne rajoitukset, jotka matemaattisella optimoinnilla vesivarojen suunnittelussa

on. Ellei jollekin ongelmalle voida kohdefunktiota muodostaa, ei matemaattista optimointia voida menestyksellä kyseisen ongelman ratkaisuun soveltaa. Erityisesti on varottava käyttämästä sokeasti hyväksi matemaattisen optimoinnin keinoja. Suunnittelijan on koko ajan nähtävä "numeroidensa taakse", tiedettävä kuinka hyvin mallit ja varsinkin kohdefunktio todellisuutta kuvaavat ja pidettävä tämä mielessä laskennan tuloksia tulkittaessa.

Kun vesivarojen suunnittelun ongelmalle on laadittu matemaattinen malli ja kohdefunktio, se voidaan pukea matemaattisen optimoinnin tehtävän muotoon. Ensin eliminoidaan kohdefunktion lausekkeesta tilamuuttujat lausumalla ne matemaattisen mallin yhtälöitä käyttäen päätösmuuttujien avulla. Sen jälkeen lausutaan myös mallin rajoitusehdoissa olevat tilamuuttujat päätösmuuttujien avulla. Näin on päästy päämäärään: Päätösmuuttujille $x_1, x_2, \dots, x_n$ on valittava sellaiset arvot, että kohdefunktio $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ saa maksimin, kun rajoitusehdot

$$(3.11) \quad \begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0 \end{aligned}$$

ovat voimassa.

Täydennetään vielä edellistä esimerkkiä siten, että pyritään maksimoimaan sadosta saatava tuotto. Kohdefunktioksi saatiin edellä

$$(3.12) \quad f(v_1, v_2) = A_1 r_1 c_1 v_1 (d_1 - v_1) + A_2 r_2 c_2 v_2 (d_2 - v_2),$$

ja lauseke oli voimassa alueella $0 \leq v_1 \leq d_1, 0 \leq v_2 \leq d_2$ (vrt 3.8 ja 3.9). Altaan tilavuus oli V joten rajoitusehdoiksi saadaan seuraavat epäyhtälöt:

$$(3.13) \quad v_1 \leq d_1, -v_1 \leq 0, v_2 \leq d_2, -v_2 \leq 0, v_1 + v_2 \leq V.$$

Seuraava askel suunnitteluongelman käsittelyssä on ongelmasta muodostetun matemaattisen optimoinnin tehtävän ratkaiseminen. Seuraavissa luvuissa esitellään eri ratkaisumenetelmiä.

4. Analyttiset menetelmät, Lagrangen kertojat, herkkyysanalyysi, sakkofunktiot

Edellä esitettiin, kuinka vesivarojen suunnitteluongelmat voidaan palauttaa matemaattisen optimoinnin tehtäväksi: Muuttujille $x_1, x_2, \dots, x_n$ on valittava sellaiset arvot, että annettu kohdefunktio $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ saa maksimin, kun muuttujat $x_1, x_2, \dots, x_n$ täyttävät lisäksi niille asetetut rajoitukset.

Jos muuttujia on vähän, jos kohdefunktio ja rajoitusehdot on annettu analyttisten lausekkeiden avulla ja jos nämä analyttiset lausekkeet ovat tarpeeksi säännöllisiä, optimointitehtävän ratkaisua voidaan yrittää etsiä tunnettuja analyttisiä menetelmiä käyttäen. Jos rajoitusten joukossa on yhtälörajoituksia, käytetään nämä ylimääräisten muuttujien eliminoimiseen sekä kohdefunktiosta että epäyhtälörajoituksista. Sen jälkeen lasketaan kohdefunktion osittaisderivaatat jäljelle jääneiden muuttujien suhteen, asetetaan nämä nolliksi ja ratkaistaan näin saatu yhtälöryhmä. Ratkaisuja saadaan mahdollisesti useita. Sitten etsitään vielä kohdefunktion ääriarvot sallitun alueen (t. s. sen alueen, jossa muuttujat täyttävät niille asetetut rajoitukset) reunoilta, ja näistä kaikista arvoista poimitaan paras.

Esimerkki: Etsittävä luvut x_1, x_2 ja x_3 siten, että $f(x_1, x_2, x_3) = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ saa maksimin, kun lukuja rajoittavat ehdot

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 0$$

$$x_1 \geq 1$$

Yhtälörajoituksesta saadaan x_3 eliminoitua:

$$x_3 = -x_1 - x_2$$

Sijoitetaan x_3 muihin lauseikkeisiin:

$$f(x_1, x_2) = -(x_1^2 + x_2^2 + (-x_1 - x_2)^2)$$

eli

$$f(x_1, x_2) = -2(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 0$$

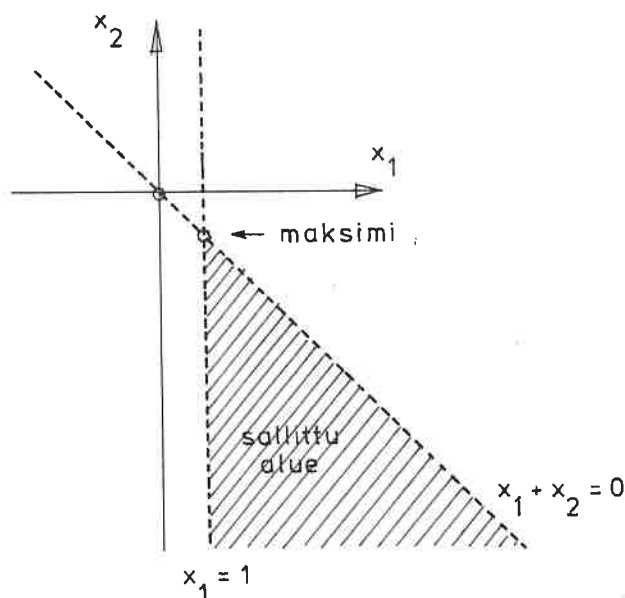
$$x_1 \geq 1$$

Lasketaan kohdefunktion osittaisderivaatat:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -4x_1 - 2x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -4x_2 - 2x_1$$

Osittaisderivaatat ovat nolliä vain kun $x_1 = x_2 = 0$. Kyseinen piste ei kuitenkaan täytä rajoitusta $x_1 \geq 1$.



Kuva 4.1. Esimerkkitehtävän sallittu alue ja maksimipiste

Kuvassa 4.1 on kuvattu sallittu alue. Reunalla $x_1 = 1$ on kohdefunktio muotoa $f(1, x_2) = -2(x_2^2 + x_2 + 1)$. Sen derivaatasta $\frac{\partial f}{\partial x_2} = -4x_2 - 2$

nähdään, että tällä reunalla f saa maksimin kun $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Tämä ratkaisu, $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, on taas sallitun alueen ulkopuolella. Kuitenkin $f(1, x_2)$:n ja sen derivaatan lausekkeista nähdään, että sallitun alueen reunalla $x_1 = 1$ f saa maksimin, kun $x_2 = -1$. Tällöin $f(1, -1) = -2$. Tarkastetaan vielä reuna $x_1 + x_2 = 0$. Sijoittamalla $x_2 = -x_1$ f :n lausekkeeseen saadaan

$$f(x_1) = -2x_1^2.$$

Tällä on maksimi, kun $x_1 = 0$. Tämä on taas sallitun alueen ulkopuolella. On helppo nähdä, että sallitun alueen reunalla $x_1 + x_2 = 0$, f saa maksimin kun $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, eli samassa pisteessä kuin reunalla $x_1 = 1$. Kun todetaan vielä, että $f(x_1, x_2) \rightarrow -\infty$ kun joko $x_1 \rightarrow +\infty$ tai $x_2 \rightarrow -\infty$, voidaan päätellä, että annetun tehtävän ratkaisu on $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, jolloin $f(x_1, x_2, x_3) = -2$.

Kohdefunktion osittaisderivaattojen yhteinen nollakohta voi olla paikallinen maksimi, paikallinen minimi tai satulapiste, jolloin kysymyksessä ei ole ääriarvo ollenkaan. Osittaisderivaattojen yhteisen nollakohdan luonne voidaan selvittää tarkastelemalla kohdefunktion korkeampia derivaattoja kyseisessä pisteessä. Useimmiten voidaan kuitenkin käytännön ongelmissa ääriarvon laatu päätellä suoraan, fysikaalisin tai geometrisin perustein, eikä tässä puututa sen vuoksi tarkemmin ääriarvon laadun määrittämiseen korkeampien osittaisderivaattojen avulla.

Analyttisten ratkaisumenetelmien merkitys käytännön ongelmissa on vähäinen. Useimmiten muuttujien lukumäärä on niin suuri, että kohdefunktion osittaisderivaatoista muodostuva epälineaarinen yhtälöryhmä on mahdoton ratkaista.

Erityisen vaikeaksi tilanteen tekevät rajoitusehdot. Näiden vaikutus voidaan eri tekniikoilla ainakin osittain eliminoida. Tarkastellaan seuraavassa Lagrangen kertojia ja sakkofunktiomenetelmiä.

Edellisessä esimerkissä yhtälörajoitus hoidettiin lausumalla yksi muuttuja muiden avulla ja eliminoimalla tämä muuttuja tehtävästä sijoituksen avulla. Epäyhtälörajoitukset käsiteltiin yksi kerrallaan tarkastelemalla kohdefunktion arvoja sallitun alueen reunoilla ja vertaamalla niitä kohdefunktion sallitun alueen sisällä saamiin arvoihin. Paremman tavan rajoitusten käsittelyyn tarjoaa Lagrangen kertojen käyttö.

Olkoon tehtävänä maksimoida kohdefunktio $f(x_1, \dots, x_n)$, kun muuttujia rajoittaa yksi ainoa yhtälörajoitus: $g(x_1, \dots, x_n) = G$. Lagrangen kertoja tekniikassa muutetaan kohdefunktiota $f(x_1, \dots, x_n)$ siten, että se sisältää myös rajoituksen $g(x_1, \dots, x_n) = G$. Uudeksi kohdefunktioksi tulee

$$B(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda (G - g(x_1, \dots, x_n)).$$

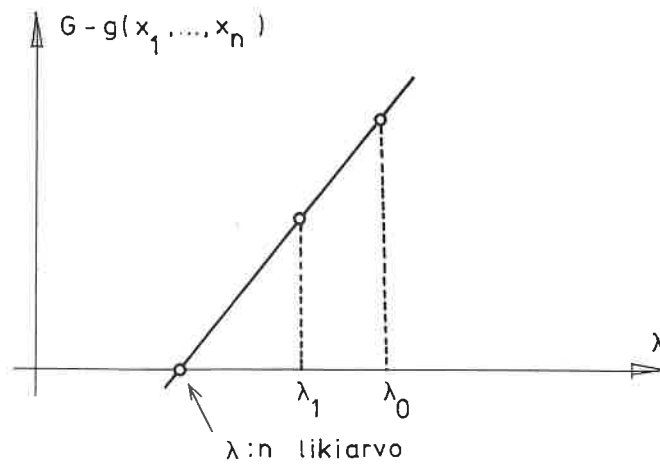
Kerrointa λ , joka on tullut mukaan uutena parametrina kutsutaan Lagrangen kertojaksi.

Lagrangen kertoja tekniikan idea on siinä, että parametrille λ voidaan löytää sellainen arvo λ^* , että kun $B(x_1, \dots, x_n, \lambda^*)$ maksimoidaan muuttujien $x_1, \dots, x_n$ suhteen ilman rajoituksia, toteutuu optimipisteessä rajoitus $g(x_1, \dots, x_n) = G$. Tällöin nimittäin k.o. maksimipiste on myös alkuperäisen tehtävän ratkaisu. Tämä voidaan päätellä seuraavasti: Ensinnäkin B :n optimipisteessä rajoitus $g(x_1, \dots, x_n) = G$ on voimassa, koska λ^* valittiin juuri tätä silmällä pitäen. Toiseksi kaikissa niissä pisteissä, joissa tämä rajoitus on voimassa, on funktioilla $f(x_1, \dots, x_n)$ ja $B(x_1, \dots, x_n, \lambda^*)$ sama arvo. Jos f saisi jossakin pisteessä, jossa rajoitus on voimassa, vielä suuremman arvon kuin $B(x_1, \dots, x_n, \lambda^*)$:n optimipisteessä, saisi B siinä myös juuri saman optimiarvoaan suuremman arvon. Tämä on mahdotonta.

Ongelmana on enää tämän oikean λ :n arvon löytäminen.

Tehtävä voidaan ratkaista esim. seuraavasti: Valitaan ensin λ :lle joku mielivaltainen arvo λ_0 ja maksimoidaan B muuttujien $x_1, \dots, x_n$ suhteen

tällä λ :n arvolla. Maksimin antavat päätösmuuttujat sijoitetaan lausekkeeseen $G - g(x_1, \dots, x_n)$ ja lasketaan sen arvo. Muutetaan sitten λ :n arvoa vähän, arvoon λ_1 , suoritetaan uusi B:n maksimointi ja lasketaan $G - g(x_1, \dots, x_n)$:n arvo. Tämä arvo merkitään molemmilla kerroilla koordinaatistoon λ :n funktiona, ja ekstrapoloimalla (tai interpoloimalla, jos $G - g(x_1, \dots, x_n)$:n arvot ovat erimerkkiset) etsitään likiarvo oikealle λ :lle. Jos halutaan, optimointi voidaan suorittaa vielä joillekin tämän likiarvon lähellä oleville λ :n arvoille, jolloin likiarvo saadaan tarkemmaksi. Kuva 4.2 esittää tilannetta.



Kuva 4.2. Lagrangen kertojan määrittäminen

Toinen vaihtoehto λ^* :n määrittämiselle on se, että tulkitaan λ uudeksi ylimääräiseksi päätösmuuttujaksi ja etsitään kohdefunktion B ääriarvo päätösmuuttujien $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda$ suhteen. Analyttistä menetelmää käyttäen saadaan $n + 1$ osittaisderivaattaa, jotka merkitään nolaksi:

$$\frac{\partial B}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial x_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial B}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial \lambda} = 0.$$

Näiden yhtälöiden ratkaisu on myös alkuperäisen ongelman ratkaisu, sillä

$\frac{\partial B}{\partial \lambda} = G - g(x_1, \dots, x_n)$. Koska tämän täytyy olla nolla, tulee B maksimoiduksi sellaisella λ :n arvolla, että rajoitus on voimassa.

Tarkastelemme seuraavaa esimerkkiä: 10 yksikköä vettä on jaettava

kahteen kohteeseen, toiseen x_1 yksikköä ja toiseen x_2 yksikköä siten, että kohdefunktio

$$f(x_1, x_2) = x_1 (10 - x_1) + x_2 (20 - x_2)$$

saa maksimin. Muodostetaan uusi kohdefunktio:

$$B(x_1, x_2, \lambda) = x_1 (10 - x_1) + x_2 (20 - x_2) + \lambda (10 - x_1 - x_2).$$

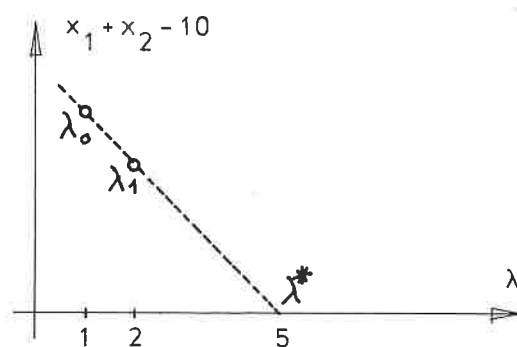
Valitaan $\lambda_0 = 1$ ja suoritetaan optimointi:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial x_1} &= 10 - 2x_1 - 1 = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial x_2} &= 20 - 2x_2 - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 4\frac{1}{2} \\ x_2 &= 9\frac{1}{2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \lambda_0 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 10 &= 4 \end{aligned}$$

Olkoon sitten $\lambda_1 = 2$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial x_1} &= 10 - 2x_1 - 2 = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial x_2} &= 20 - 2x_2 - 2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 4 \\ x_2 &= 9 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \\ x_1 + x_2 - 10 &= 3 \end{aligned}$$

Merkitään arvot koordinaatistoon ja suoritetaan ekstrapolointi (kuva 4.3):



Kuva 4.3. Lagrangen kertojan määrittäminen

Likiarvo λ^* :lle on 5. Suoritetaan optimointi tällä λ :n arvolla:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial x_1} &= 10 - 2x_1 - 5 = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial x_2} &= 20 - 2x_2 - 5 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 2\frac{1}{2} & \lambda &= 5 \\ x_2 &= 7\frac{1}{2} & x_1 + x_2 - 10 &= 0 \end{aligned}$$

Huomaamme, että tässä yksinkertaisessa tapauksessa lineaarinen ekstrapolointi antoi täsmällisesti oikean λ^* :n. Ratkaistaan sama esimerkki myös jälkimmäisellä tavalla.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial x_1} &= 10 - 2x_1 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial x_2} &= 20 - 2x_2 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial \lambda} &= 10 - x_1 - x_2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 10 - 2x_2 + 2x_1 &= 0 & x_1 &= 2\frac{1}{2} \\ x_2 &= 7\frac{1}{2} \\ 10 - x_1 - x_2 &= 0 & \lambda &= 5 \end{aligned}$$

Tämä tapa antaa siis saman tuloksen.

Jos kysymyksessä on epäyhtälörajoitus $g(x_1, \dots, x_n) \leq G$, suoritetaan kohdefunktion modifiointi samoin kuin edellä:

$$B(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda(G - g(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

mutta asetetaan Lagrangen kertojalle λ lisäehto $\lambda \geq 0$. Lagrangen kertojatekniikan idea on nyt siinä, että kun maksimoidaan B muuttujien $x_1, x_2, \dots, x_n$ suhteen ja minimoidaan muuttujan λ suhteen, päädytään arvoihin $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ jotka ovat alkuperäisen tehtävän ratkaisu. Piste $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ on siis B :n satulapiste.

Arvojen $x_1^*, \dots, x_n^*$ optimaalisuus alkuperäiselle tehtävälle voidaan päätellä seuraavasti: Ehdon $G - g(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ täytyy olla voimassa, sillä jos k.o. lauseke olisi negatiivinen, pienentäisi λ :n kasvattaminen heti B :n arvoa, eikä kysymyksessä voisi olla λ :n suhteen minimipiste. Samoin

todetaan, että jos $G - g(x_1^*, \dots, x_n^*) > 0$ (eikä $= 0$), on $\lambda^* = 0$, sillä λ pyrkii minimoimaan B:n. Näin siis B:n satulapiste sijaitsee alkuperäisen tehtävän sallitulla alueella, ja satulapisteessä $B(x_1^*, \dots, x_n^*, \lambda^*) = f(x_1^*, \dots, x_n^*)$. Jos f saisi jossakin sallitulla alueella vielä suuremman arvon, minimoisi λ tässäkin pisteessä termin $\lambda(G - g(x_1, \dots, x_n))$ nollaan ja B saisi saman arvon kuin f . Tämä on mahdotonta, sillä e.m. satulapiste oli B:n maksimi muuttujien $x_1, x_2, \dots, x_n$ suhteen.

Oikean λ :n löytämiseksi voidaan käyttää samanlaisia menetelmiä kuin yhtä-
törajoituksenkin tapauksessa. Ainoa poikkeus on mukaan tullut ylimääräinen rajoitus $\lambda \geq 0$.

Jos tehtävässä on useita rajoitusehtoja, hoidetaan kukin omalla Lagrangen kertojalla λ_i , siis lisätään alkuperäiseen kustannusfunktioon termi $\lambda_i (G_i - g_i(x_1, \dots, x_n))$ kutakin rajoitusta kohti. Jos kysymyksessä on epäyhtälörajoitus, sitoo Lagrangen kertojaa lisäksi ehto $\lambda_i \geq 0$.

Lagrangen kertojat lisäävät tehtävän muuttujien lukumäärää. Niiden käyttö poistaa kuitenkin yhtälörajoitukset ja korvaa kaikki epäyhtälörajoitukset yksinkertaista tyyppiä $\lambda_i \geq 0$ olevilla rajoituksilla. Nämä seikat helpottavat suuresti rajoitusten käsittelyä.

Toinen merkittävä etu, joka Lagrangen kertojilla saavutetaan, liittyy herkkyysanalyysiin, jota tarkastellaan seuraavaksi.

Kun suunnittelija on saattanut ongelmansa matemaattisen optimoinnin muotoon ja löytänyt optimointitehtävän ratkaisun, on alkuperäinen ongelma vasta puoliksi ratkaistu. Kohdefunktion, samoin kuin rajoitusehtojenkin, parametrit on usein jouduttu perustamaan hyvin karkeille arvioille puutteellisista tiedoista ja eri hyötynäkökohtien vaikeasta yhteensovittavuudesta johtuen, eikä matemaattisen optimointitehtävän ratkaisu näin ollen voi olla "viimeinen sana" asiassa. Tärkeää on tietää, miten optimikustannus muuttuu, jos parametrien arvot muuttuvat. Eräs tapa selvittää asia on suorittaa koko optimointi uudelleen näillä uusilla lähtötiedoilla. Jotain tietoa

saadaan suoraan, ja paljon vähemmällä vaivalla, Lagrangen kertojista. Päätösmuuttujien optimipisteessä nimittäin

$$\frac{\partial f}{\partial G_i} = \lambda_i$$

kuten on helppo todeta esim. tulkitsemalla B vielä G_i :nkin funktioksi ja derivoimalla.

Tämä yhtälö voidaan kirjoittaa likimääräiseen muotoon seuraavasti:

$$\Delta f_i = \lambda_i \cdot \Delta G_i$$

Jos siis jonkin rajoitusyhtälön $g_i(x_1, \dots, x_n) \leq G_i$ rajoittavaa vakiota G_i muutetaan pienellä määrällä ΔG_i , niin tämän muutetun rajoituksen täyttävä maksimi eroaa alkuperäisestä $\lambda_i \cdot \Delta G_i$:n verran. Jos Lagrangen kertoja on itseisarvoltaan pieni, ei vastaava rajoitusyhtälö vaikuta suuresti optimiin; optimi ei ole herkkä tälle rajoitusyhtälölle. Pääinvastaisessa tapauksessa taas rajoitusyhtälön muutokset vaikuttavat optimiarvoon voimakkaasti.

Lagrangen kertojilla on erityisen merkittävä tulkinta taloudellisissa ongelmissa, joissa kustannusfunktion dimensio on tuotto (määrä $\times$ hinta) ja joissa rajoitukset koskevat hinnaltaan tunnettuja resursseja. Tällöin Lagrangen kertojat mittaavat tuoton herkkyyttä rajoitusten vaihteluille, ja näin ollen määräävät resurssiyksikölle n.k. varjohinnan.

Selvitetään asiaa seuraavan esimerkin valossa.

Tuotteen valmistaja tarvitsee kahta raaka-ainetta, joita hänellä on varastossa 10 000 kg ja 3 000 kg. Valmiiseen tuotekiloon tarvitaan edellistä 0,7 kg ja jälkimmäistä 0,3 kg. Valmiista tuotteesta hän saa myynissä 2 mk/kg. Optimointitehtävänä on määrätä valmiiseen tuotteeseen käytettävät raaka-ainemäärät siten, että myyntituotto tulee mahdollisimman suureksi. Ratkaisu on pääteltävissä suoraan. Jälkimmäinen raaka-ainevarasto 3 000 kg käytetään kokonaan ja edellistä raaka-ainetta kulutetaan 7 000 kg,

jolloin suhde pysyy oikeana. Tuotetta tulee silloin 10 000 kg ja myyntituloja 20 000 mk.

Lagrangen kertojen ja varjohintakäsitteen valaisemiseksi suoritetaan kuitenkin ongelman formaali käsittely. Jos merkitään valmiin tuotteen määrää muuttujalla x , on tehtävänä maksimoida

$$f(x) = 2x$$

siten että rajoitukset

$$(0,7x \leq 10\,000)$$

$$0,3x \leq 3\,000$$

ovat voimassa. Koska edellinen rajoitus on voimassa aina silloin kuin jälkimmäinenkin, voidaan se jättää huomioimatta. Samoin muuttujan x positiivisuusrajoitus voidaan jättää pois, koska negatiiviset arvot eivät voi tulla kysymykseen optimia haettaessa.

Otetaan käyttöön Lagrangen kertoja ja modifioidaan tehtävä seuraavasti:

$$B(x, \lambda) = 2x + \lambda(3000 - 0,3x)$$

on maksimoitava x :n suhteen ja minimoitava λ :n suhteen siten, että rajoitus $\lambda \geq 0$ on voimassa. Optimi löytyy ratkaisemalla osittaisderivaatat:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = 2 - 0,3 = 0 \quad \lambda = \frac{20}{3} \geq 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial \lambda} = 3000 - 0,3x = 0 \quad x = 10000$$

Löydetty λ :n arvo $\lambda = \frac{20}{3}$ voidaan nyt tulkita jälkimmäisen resurssin varjohinnaksi: jos resurssia on yksi yksikkö enemmän, kasvaa kohdefunktion arvo, myyntitulot, $\frac{20}{3}$ yksikköä. Tämä on helppo tarkistaa. Jos jälkimmäistä resurssia saadaan yksi yksikkö lisää, voidaan edellistä resurssia, jota jäi käyttämättä, ottaa $\frac{0,7}{0,3}$ yksikköä lisää, jolloin tuotetta saadaan vielä $1 + \frac{0,7}{0,3}$ yksikköä, ja myyntitulot kasvavat $2(1 + \frac{0,7}{0,3}) = \frac{20}{3} = \lambda$ yksikköä.

Tuotteen valmistaja voi nyt verrata resurssin todellista hintaa sen varjohintaan λ . Jos todellinen hinta on varjohintaa pienempi, kannattaa hänen ilmeisesti hankkia tätä resurssia lisää, ja lisätä tuotteen määrää. Päinvastaisessa tapauksessa resurssin hankinta ei luonnollisesti kannata.

Varjohintatulkintaa voidaan soveltaa myös muissa yhteyksissä. Voidaan esimerkiksi ajatella, että kunta on jollakin tavalla määritellyt järven rannalla olevan virkistysalueen kuntalaiselle antaman hyödyn rahassa. Järven rantamaa on virkistystoimintaan tarvittava resurssi, ja sille voidaan määrätä oma varjohintansa ja verrata sitä rantamaan todelliseen hintaan. Tässä tapauksessa kuitenkin johtopäätösten vetäminen näiden hintojen suhteesta on vaikeampaa. Jos kunta ostaa lisää maata, siihen tarvitaan budjetoituja varoja, mutta lisääntynyt hyöty voidaan vain karkeasti arvioida rahassa.

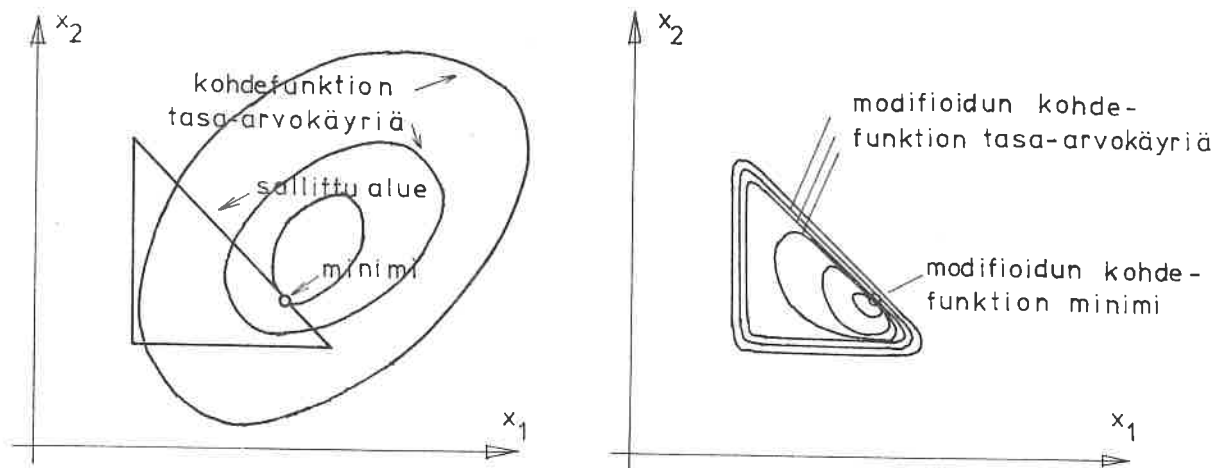
Paitsi Lagrangen kertojilla rajoitusehdot voidaan poistaa ja sisällyttää kohdefunktioon n.k. sakkofunktiomenetelmällä. Jos minimointitehtävän kustannusfunktioon lisätään termi, joka sallitulla alueella saa pieniä arvoja mutta heti sallitun alueen reunoja lähestyttäessä kasvaa voimakkaasti, niin minimoimalla tämä modifioitu kustannusfunktio ilman mitään rajoituksia päädytään suunnilleen alkuperäisen tehtävän rajoitusehdot täyttävään optimiin. Tämä johtuu siitä, että sallitun alueen ulkopuolella olevat pisteet eivät voi minimiä haettaessa tulla kysymykseen, koska lisätty termi "sakottaa" niitä voimakkaasti suurilla arvoilla. Kohdefunktioon lisättävää termiä kutsutaan sakkofunktioksi.

Eräs esimerkki sakkofunktioista on seuraava: Jos minimoitavana on kohdefunktio $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ja rajoitukset ovat $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$, niin minimoidaan modifioitu kohdefunktio

$$B(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \frac{k_1}{g_1(x_1, \dots, x_n)} - \dots - \frac{k_m}{g_m(x_1, \dots, x_n)}$$

ilman mitään rajoituksia. Luvut $k_1, \dots, k_m$ ovat sopivasti valittuja positiivisia vakioita. Sallitulla alueella lausekkeet $g_i(x_1, \dots, x_m)$ ovat negatiivisia. Kun lähestytään alueen reunaa sallitun alueen puolelta, joku

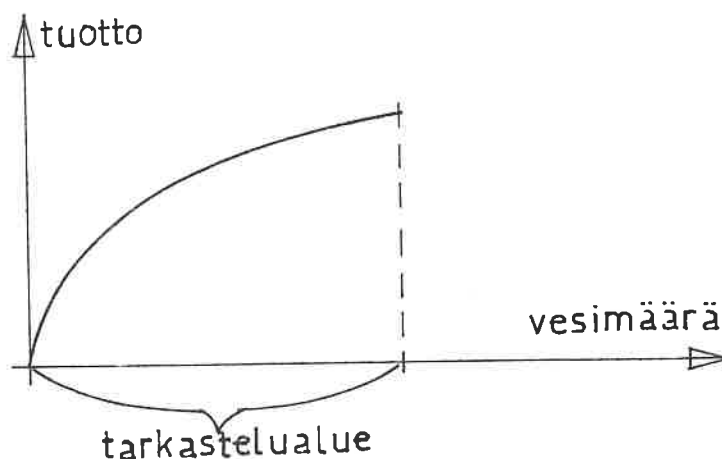
lausekkeista $g_i(x_1, \dots, x_m)$ lähestyy nollaa ja vastaavasti termi $-k_i/g_i(x_1, \dots, x_m)$ kasvaa voimakkaasti. Kuva 4.4 esittää alkuperäisen ja modifioidun kohdefunktion tasa-arvokäyriä kahden muuttujan tapauksessa.



Kuva 4.4. Sakkofunktion vaikutus kohdefunktion tasa-arvokäyriin

Sakkofunktiomenetelmä on varsin tehokas keino epäyhtälörajoitusten käsittelyssä. Haittapuolena on se, että kustannusfunktion modifiointi siirtää aina hieman optimin paikkaa. Kysymyksessä on siis likimääräismenetelmä. Tätä haittaa voidaan vähentää valitsemalla kuhunkin tehtävään mahdollisimman hyvin sopivat sakkofunktiot. Suunnittelijan kokemus ja taito määräävät likiarvon tarkkuuden.

Valaistaan vielä sakkofunktioiden käyttöä seuraavalla esimerkillä. Viljelijällä on käytössään kasteluvettä 1 tilavuusyksikkö. Hänen on jaettava tämä määrä kahdelle viljelmälle siten, että näiden yhteinen tuotto muodostuisi mahdollisimman suureksi. Kummankin viljelmän tuotto on verrannollinen alueelle johdetun vesimäärän neliöjuureen: aluksi veden lisäys kasvattaa tuottoa voimakkaasti, mutta suuremmilla vesimäärillä vaikutus heikkenee huomattavasti. Kuva 4.5 esittää tilannetta.

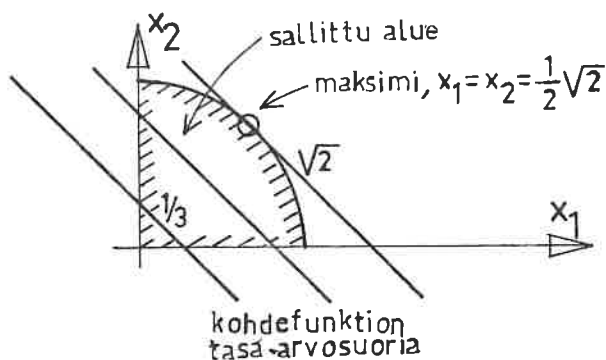


Kuva 4.5. Tuoton riippuvuus kasteluun käytetystä vesimäärästä

Verrannollisuus neliöjuureen ei voi luonnollisesti olla voimassa kovin suurilla vesimäärän arvoilla. Oletetaan kuitenkin, että käytössä olevan vesimäärän puitteissa neliöjuuririippuvuus on voimassa. Jos johdettavat vesimäärät ovat v_1 ja v_2 , ovat tuotot vastaavasti $k\sqrt{v_1}$ ja $k\sqrt{v_2}$. Tehtävänä on nyt maksimoida $f = k\sqrt{v_1} + k\sqrt{v_2}$ rajoituksilla $v_1 + v_2 \leq 1$, $v_1 \geq 0$, $v_2 \geq 0$. Jos valitaan päätösmuuttujiksi juoksumatusten neliöjuuret, $x_1 = \sqrt{v_1}$ ja $x_2 = \sqrt{v_2}$, sekä maksimoidaan f/k , saadaan tehtäväksi:

$$\begin{array}{ll} \text{maksimoitava} & x_1 + x_2 \\ \text{rajoituksilla} & \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Kuvassa 4.6 on esitetty graafinen ratkaisu.



Kuva 4.6. Optimointitehtävän graafinen ratkaisu

Sallittu alue on yksikköympyrän positiivinen neljännes ja tasa-arvo suorat ovat suoran $x_1 + x_2 = 0$ suuntaiset. Kohdefunktion arvo kasvaa siirryttäessä positiivisessa neljänneksessä ulospäin, ja maksimi saavutetaan pisteessä $x_1 = x_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2}$. Tämä kaikki voidaan päätellä suoraan kuvasta .

Ratkaistaan sama tehtävä seuraavaksi sakkofunktiomenetelmällä. Lisätään kohdefunktioon termi, joka ei vaikuta paljoa sallitun alueen keskiosissa, mutta pienenee voimakkaasti alueen reunoja lähestyttäessä siten, että alueen ulkopuoliset alueet eivät voi tulla kysymykseen maksimia etsittäessä. Yksinkertaisuuden vuoksi otetaan mukaan ainoastaan rajoitus $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$.

Sopiva sakkotermi on esimerkiksi $R = \frac{1}{4(x_1^2 + x_2^2 - 1)}$. Kun alueen reunaa

lähestytään alueen sisältä päin, R lähestyy arvoa $-\infty$.

Modifioitu tehtävä on nyt seuraavanlainen:

$$\text{Maksimoitava } f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + \frac{1}{4(x_1^2 + x_2^2 - 1)}$$

ilman rajoituksia.

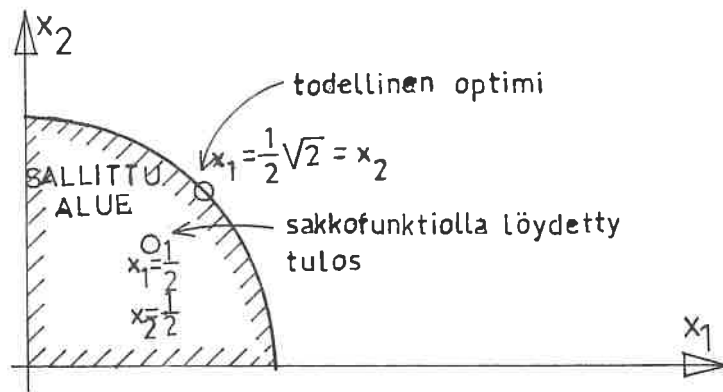
Derivoimalla kohdefunktio muuttujiensa suhteen saadaan yhtälöt:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 - \frac{x_1}{2(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 1 - \frac{x_2}{2(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2} \end{cases}$$

Asetetaan osittaisderivaatat nolliksi ja jaetaan ensin yhtälöiden puoliskot keskenään, jolloin saadaan tulos $x_1 = x_2$. Sijoittamalla tämä ensimmäiseen yhtälöön päädytään ehtoon

$$2(2x_1^2 - 1)^2 - x_1 = 0,$$

josta seuraa lopputulos $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$.



Kuva 4.7. Sakkofunktioilla löydetty ratkaisu

Saatu ratkaisu poikkeaa oikeasta ratkaisusta jonkin verran. Syy tähän on selvä: sakkotermi $R = \frac{1}{4(x_1^2 + x_2^2 - 1)}$ "sakottaa myös alueen sisällä

olevia sallittuja arvoja; sitä enemmän mitä lähempänä reunaa arvot ovat. Virheen suuruutta voidaan kuitenkin pienentää valitsemalla parempi sakko-funktio. Jos korvataan edellinen termi $R = \frac{1}{4(x_1^2 + x_2^2 - 1)}$ termillä

$R_1 = \frac{\mathcal{E}}{4(x_1^2 + x_2^2 - 1)}$, missä $\mathcal{E} > 0$ on hyvin pieni, on R_1 sallitun alueen

sisällä pieni, mutta lähestyy taas aivan reunan lähellä arvoa $-\infty$.

Suorittamalla edellä esitetyt laskut uudelleen saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ 2(2x_1^2 - 1)^2 - \mathcal{E}x_1 = 0 \end{cases}$$

Jos annetaan kertoimen $\mathcal{E}$ lähestyä nollaa, lähestyy sakkotermi R_1 sallitulla alueella kohti nollaa, mutta reunalla se on aina $-\infty$. Ratkaisun antavat yhtälöt ovat tällöin

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ 2(2x_1^2 - 1)^2 = 0 \end{cases}$$

joista saadaan tulokseksi $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, sama kuin tarkka ratkaisu.

Edellä kuvattu raja-arvomenettely ei tietenkään onnistu realistisissa tehtävissä, joissa ratkaisun antavia yhtälöitä on mahdoton kirjoittaa suljetussa muodossa. Tällöin on vain pyrittävä muodostamaan mahdollisimman hyvä sakkofunktio, ja hyväksyttävä laskennan tulos optimipisteeksi.

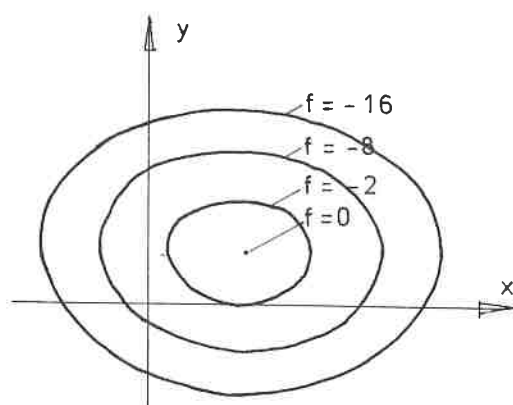
Useissa tehtävissä rajoitusehdot eivät ole niin ehdottomia, etteikö niistä tarpeen vaatiessa voitaisi hieman joustaa. Tällöin puhutaan pehmeistä rajoituksista (soft constraints). Tällaisiin pehmeisiin rajoituksiin sakko-funktiomenettely sopii hyvin. Jos laskettu optimipiste sijaitsee hieman sallitun alueen ulkopuolella, voidaan se silti hyväksyä, koska rajoitus on "pehmeä" ja sitä on rikottu vain vähän.

5. Gradienttimenetelmät

Olkoon tehtävänä maksimoida kahden muuttujan funktio

$$f(x, y) = -x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 6$$

ilman rajoituksia. Kuvaan 5.1 on hahmoteltu joitakin f :n tasa-arvokäyriä, t. s. käyriä, joilla $f(x, y)$:llä on vakioarvo.



Kuva 5.1. Kohdefunktion tasa-arvokäyrät

On helppo todeta, esim. $f(x, y)$:n osittaisderivaatoista

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -4y + 4,$$

että $f(x, y)$:llä on maksimi pisteessä $x = 2$, $y = 1$, jossa $f = 0$.

Seuraavaksi suoritetaan maksimointi gradienttimenetelmää käyttäen.

Lähdetään liikkeelle jostakin pisteestä (x_0, y_0) , joka pyritään arvioimaan mahdollisimman lähelle maksimia, ja lasketaan f :n arvo tässä pisteessä.

Otetaan lähtöpisteeksi $(-1, -1)$, jolloin $f(x_0, y_0) = f(-1, -1) = -17$.

Lasketaan myös molempien ensimmäisten osittaisderivaattojen arvot k.o. pisteessä: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 6$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 8$.

Koska osittaisderivaatat eivät ole nollia, ei (x_0, y_0) ole maksimpiste.

Lasketuista osittaisderivaattojen arvoista voidaan kuitenkin muodostaa f :n

gradientti pisteessä (x_0, y_0) : $\nabla f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \bar{j} = 6\bar{i} + 8\bar{j}$. Kun tiedetään, että f :n gradientti jossakin pisteessä näyttää suunnan, johon liikuttaessa f kasvaa voimakkaimmin, kannattaa f :n maksimia lähtee etsimään juuri tästä suunnasta. Valitaan siis jokin askelpituus k , esim. $k = 2$, ja edetään pisteestä $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ gradientin suuntaan kakkosen pituinen askel pisteeseen (x_1, y_1) . Pisteiden (x_1, y_1) koordinaateiksi saadaan

$$x_1 = x_0 + k \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{|\nabla f(x_0, y_0)|}$$

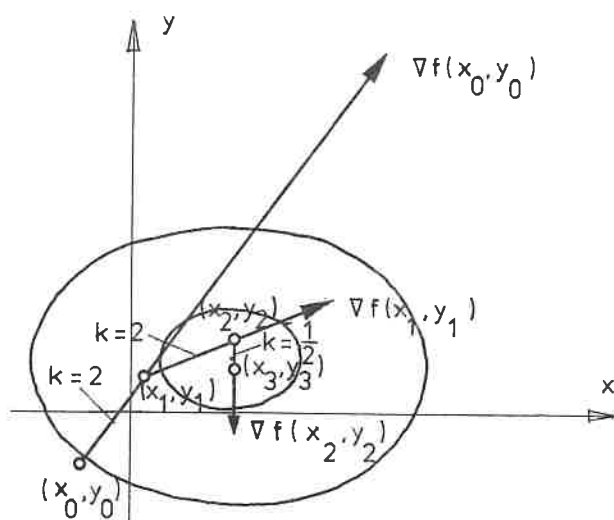
$$y_1 = y_0 + k \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{|\nabla f(x_0, y_0)|}$$

eli

$$x_1 = -1 + 2 \cdot \frac{6}{\sqrt{36 + 64}} = 0,2$$

$$y_1 = 1 + 2 \cdot \frac{8}{\sqrt{36 + 64}} = 0,6$$

Tilanne on esitetty kuvassa 5.2



Kuva 5.2. Gradienttimenetelmän kulku

Funktion f arvo pisteessä (x_1, y_1) on $-3,56$, siis paljon suurempi kuin pisteessä (x_0, y_0) . Lasketaan seuraavaksi gradientti pisteessä (x_1, y_1) :

$$\nabla f(x_1, y_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1) \bar{j} = 3,6 \bar{i} + 1,6 \bar{j}$$

ja edetään sen suuntaan jälleen kakkosen pituinen askel, pisteeseen (x_2, y_2) (ks. kuva 5.2), jossa

$$x_2 = 0,2 + 2 \cdot \frac{3,6}{\sqrt{3,6^2 + 1,6^2}} \approx 2,03$$

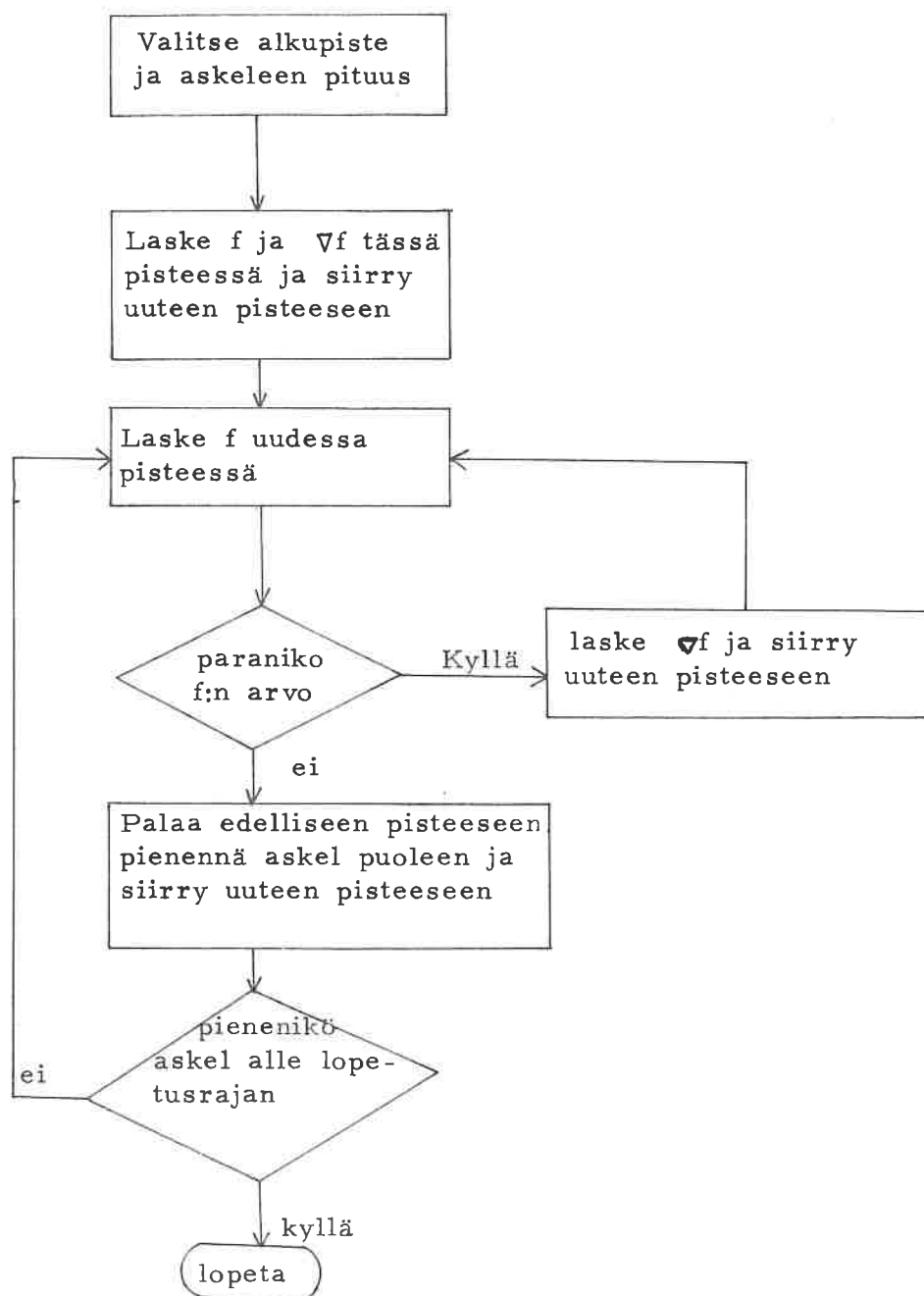
$$y_2 = 0,6 + 2 \cdot \frac{1,6}{\sqrt{3,6^2 + 1,6^2}} \approx 1,41$$

Funktion f arvo pisteessä (x_2, y_2) on noin $-0,34$, joten piste (x_2, y_2) on taas lähempänä optimia kuin piste (x_1, y_1) .

Näin jatketaan. Edettäessä kakkosen pituinen askel pisteestä (x_2, y_2) gradientin suuntaa, joudutaan pisteeseen $(2, -0,6)$, missä f illä on arvo $-6,55$; pienempi kuin edellisessä pisteessä. Palataan edelliseen pisteeseen, pienennetään askel puoleen, ja edetään gradientin $\nabla f(x_2, y_2)$ suuntaan vain ykkösen pituinen askel, pisteeseen $(2, 0,4)$. Tässä f illä on arvo $-0,72$. Koska tämäkin on vielä huonompi kuin $f(x_2, y_2) = -0,34$, palataan taas pisteeseen (x_2, y_2) , pienennetään askel puoleen edellisestä ja edetään $\nabla f(x_2, y_2)$:n suuntaan puolikkaan pituinen askel. Nyt joudutaan pisteeseen $(x_3, y_3) = (2, 0,9)$ jossa $f \approx -0,02$.

Gradienttimenetelmän yleinen kulku on nyt tullut esitetyksi. Edellisestä pisteestä edetään gradientin suuntaan (minimointitehtävässä negatiivisen gradientin suuntaan) sellaisella askelpituudella, että uudessa pisteessä saatu f :n arvo on edellistä parempi. Jos uudessa pisteessä f :n arvo on edellistä huonompi, palataan edelliseen pisteeseen, puolitetään askelpituus ja yritetään uudelleen, ja puolittamista jatketaan niin kauan kunnes uusi piste on edellistä parempi. Algoritmi lopetetaan, kun askelpituus on pienentynyt alle jonkin sopivaksi katsotun rajan. Viimeiseksi saavutettu piste hyväksytään sitten optimipisteeksi. Algoritmin kulkua voidaan kuvata

kuvassa 5.3 esitetyllä kulkukaaviolla.



Kuva 5.3. Gradienttimenetelmän kulkukaavio

Seuraavat gradienttimenetelmää koskevat seikat kannattaa panna merkille: Esimerkkitapauksessa muuttujia oli vain kaksi. Yleistys useamman muuttujan tapauksiin on kuitenkin täysin suoraviivainen. Jos muuttujien lukumäärä nousee toiselle kymmenelle, alkaa menetelmän hallinnassa ilmetä

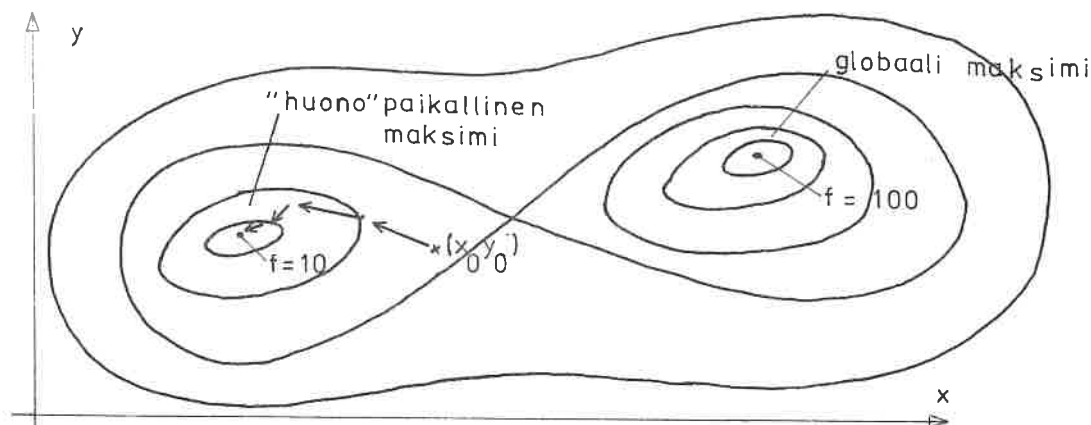
vaikeuksia, varsinkin jos kohdefunktio on kovin epäsäännöllisesti käyttäytyvä.

Gradientit laskettiin edellä analyttisistä lausekkeista. Yhtä hyvin voidaan käyttää osittaisderivaattojen diskreettejä approksimaatioita. Esim.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ voidaan korvata lausekkeella $\frac{1}{h}(f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0))$.

Tätä varten on laskettava f :n arvo paitsi pisteessä (x_0, y_0) , myös jossakin läheisessä pisteessä $(x_0 + h, y_0)$.

Jos kohdefunktiolla on useita maksimeita, voi gradienttimenetelmä johtaa paikalliseen maksimiin, joka on globaalista maksimia huonompi, ks. kuva 5.4. Oikea maksimi löytyy vain, jos alkupiste (x_0, y_0) on tarpeeksi hyvin



Kuva 5.4. Gradienttimenetelmä johtaa lähimpään paikalliseen maksimiin

valittu. Sen täytyy sijaita "oikealle huipulle johtavalla rinteellä".

Ainoa keino alkuarvon saamiseksi tälle rinteelle on kyllin hyvä ennakkokäsitys ongelmasta ja optimin sijainnista.

Edellä askelta pienennettiin puolittamalla se joka kerta. Muitakin pienennysohjelmia voi käyttää, mutta puolittaminen on varsin hyvä vaihtoehto.

Ellei kohdefunktion luonteesta ole edeltä käsin tarpeeksi hyvää kuvaa, ei lopetettaessa voida ollenkaan tietää, kuinka lähellä todellista optimia ollaan. Sellaista lopettamissääntöä, joka takaisi optimin läheisyyden, ei liene olemassakaan. Paras tapa on hankkia kyllin hyvä intuitiivinen kuva

tilanteesta.

Joissakin gradienttimenetelmien parannetuissa versioissa, nk. konjugaatti-gradienttimenetelmissä, pyritään käyttämään hyväksi myös toisia derivaattoja ja näin kiihdyttämään menetelmän konvergenssia. Näissä menetelmissä joudutaan suorittamaan matriisin

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

invertointi jokaisella askeleella, ja tämä on paljon laskenta-aikaa vaativa toimenpide. Yksinkertaisissa tapauksissa konvergenssi on gradienttimenetelmän perusmuodossakin hyvä, ja monimutkaisissa tapauksissa parannetun version arvo on kovin kyseenalainen. Käytännön ongelmissa ei yleensä toisten derivaattojen käytöllä saavuteta mitään hyötyä.

Jos ongelmassa on muuttujilla rajoituksia, gradienttimenetelmien käyttö vaikeutuu huomattavasti. Yhtälörajoitukset voidaan hoitaa Lagrangen kertoja tekniikalla, tosin samalla on muuttujien lukumäärää lisättävä. Myös joitakin yksinkertaisia epäyhtälörajoituksia voidaan käsitellä; menetelmiä kutsutaan gradienttiprojektiomenetelmiksi. Nämä soveltuvat parhaiten lineaarisiin, siis muotoa

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n - b_n$$

oleviin rajoituksiin. Gradienttimenetelmä yhdessä sakkofunktiomenetelmän kanssa on hyvin käyttökelpoinen yhdistelmä. Mainituksi tulleista varauksista huolimatta gradienttimenetelmä kuuluu kaikkein käyttökelpoisimpiin epälineaaristen tehtävien optimointimenetelmiin. Jos kohdefunktio on kovin epä-säännöllinen ja jos muuttujien lukumäärä nousee toiselle kymmenelle, on gradienttimenetelmä usein ainoa, joka voi tulla kysymykseen.

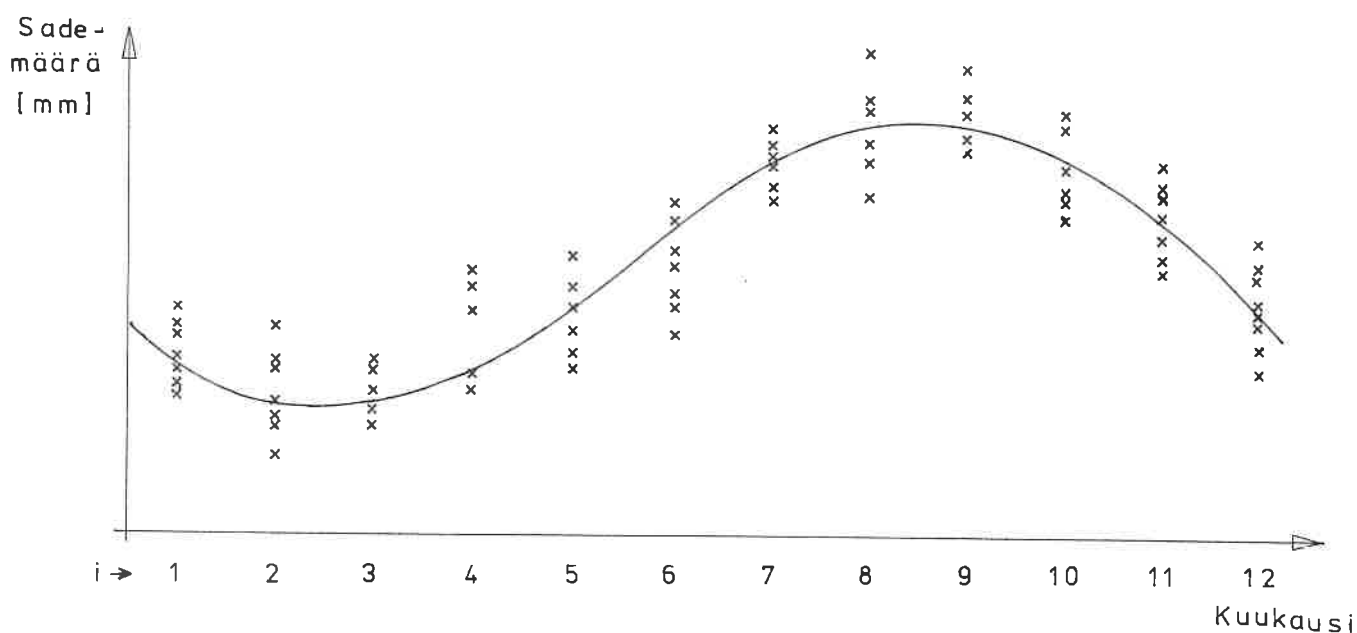
Lopuksi käsitellään vielä esimerkki. Kymmenen vuoden aikana on mitattu kuukausisadannat x_{ij} ; $i = 1, 2, \dots, 12$; $j = 1, 2, \dots, 10$, ja näihin mittaustuloksiin halutaan sovittaa funktio

$$f(i) = A + B \sin(Ci + D) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, 12$$

siten että virheiden neliöiden summa

$$\begin{aligned} S(A, B, C, D) &= \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{10} (f(i) - x_{ij})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{10} (A + B \sin(Ci + D) - x_{ij})^2 \end{aligned}$$

on mahdollisimman pieni. Toisin sanoen, muuttujille A , B , C ja D halutaan löytää sellaiset arvot, että kohdefunktio $S(A, B, C, D)$ saa minimin, ks. kuva 5.5.



Kuva 5.5. Käyrän sovittaminen mittauspisteisiin

Ratkaisu aloitetaan merkitsemällä sadehavainnot koordinaatistoon, piirtämällä siihen sinikäyrä, joka silmämääräisesti sopii hyvin mittauksiin ja lukemalla sinikäyrän parametrit A_0 , B_0 , C_0 ja D_0 , jotka valitaan muuttujien alkuarvoiksi. Sitten lasketaan virheiden neliöiden summa näillä parametreillä, lasketaan osittaisderivaatat

$$\frac{\partial S}{\partial A} = \sum \sum 2 (A + B \sin (C_i + D) - x_{ij})$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} = \sum \sum 2 \sin (C_i + D) (A + B \sin (C_i + D) - x_{ij})$$

$$\frac{\partial S}{\partial C} = \sum \sum 2i B \cos (C_i + D) (A + B \sin (C_i + D) - x_{ij})$$

$$\frac{\partial S}{\partial D} = \sum \sum 2 B \cos (C_i + D) (A + B \sin (C_i + D) - x_{ij}),$$

muodostetaan gradientti alkupisteessä, valitaan askelpituus ja lähdetään toteuttamaan optimointia edellä esitetyn kulkukaavion mukaan.

Kyseessä on tyypiesimerkki tehtävästä, jonka ratkaisemisessa gradientti-menetelmä on omaa luokkaansa.

6. Lineaarinen optimointi, duaalisuus, Simplex-algoritmi

Jos matemaattisen optimointitehtävän sekä kohdefunktio että rajoitusepäyhtälöt ovat lineaarisia:

$$\begin{aligned} \text{maksimoitava} \quad & f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ \text{rajoituksin} \quad & \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m \end{cases} \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \end{aligned}$$

missä $x_1, x_2, \dots, x_n$ ovat tehtävän päätösmuuttujat ja

$c_1, c_2, \dots, c_n, a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ tunnettuja vakioita, on

kysymyksessä lineaarisen optimoinnin (tai lineaarisen ohjelmoinnin) tehtävä.

Lineaarinen optimointi on varsin hyvin hallittu optimointimenetelmä. Lähes kaikkiin suurempiin tietokoneisiin on olemassa hyvin toimivat kirjasto-ohjelmat, jotka pystyvät käsittelemään jopa tuhansien muuttujien suuruisia tehtäviä. Jos ongelma on hyvin määritelty ja koodaus tietokoneelle oikein suoritettu, ei ratkaisun löytymisessä ilmene vaikeuksia.

Lähdetään tutustumaan lineaariseen optimointiin seuraavan esimerkin valossa. Vaikka esimerkki on yksinkertainen, siitä ilmenee kaikki lineaariselle optimoinnille olennaiset seikat. Altaassa on vettä käytettävissä $100 \cdot 10^6 \text{ m}^3$. Siitä halutaan juoksuttaa osa viljelmille kastelua varten ja osa voimalaitokselle energian tuotantoon. Viljelmille voidaan johtaa korkeintaan $60 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ ja voimalaitokseen tarvitaan vähintään $20 \cdot 10^6 \text{ m}^3$. Voimalaitokseen lasketusta vedestä saadaan hyötyä 1 p/m^3 ja kasteluvedestä 2 p/m^3 . Tehtävänä on nyt määrätä kasteluun ja voimalaitok-

seen ohjattavat vesimäärät siten, että kokonaishyöty tulisi mahdollisimman suureksi.

Päätösmuuttujina optimointitehtävässä ovat kasteluun ja voimalaitokseen ohjattavat vesimäärät x_1 ja x_2 . Koska altaassa on vettä käytettävissä $100 \cdot 10^6 \text{ m}^3$, on oltava voimassa ehto

$$(6.1) \quad x_1 + x_2 \leq 100 \cdot 10^6$$

Kasteluun voidaan juoksuttaa korkeintaan $60 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ ja voimalaitos tarvitsee ainakin $20 \cdot 10^6 \text{ m}^3$, joten

$$(6.2) \quad x_1 \leq 60 \cdot 10^6 \quad \text{ja}$$

$$(6.3) \quad x_2 \geq 20 \cdot 10^6 .$$

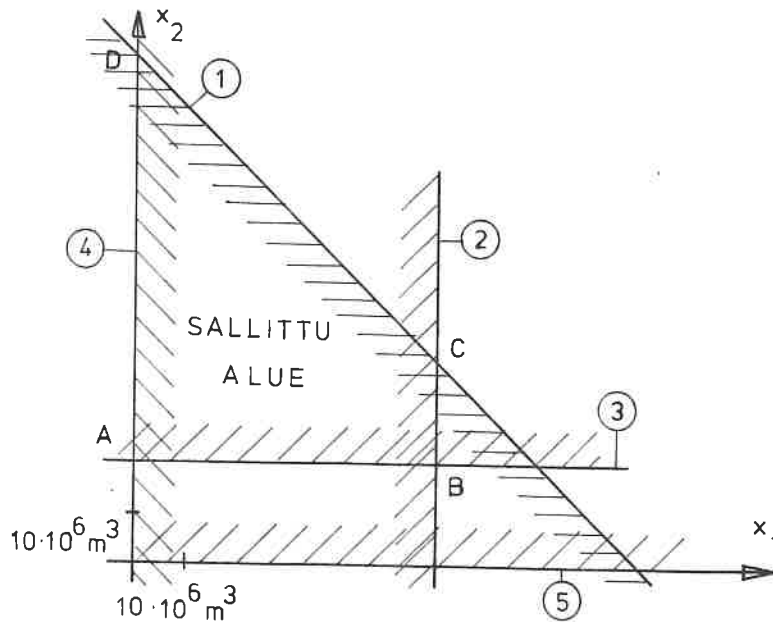
Lisäksi ohjattavat vesimäärät eivät voi olla negatiivisia, joten

$$(6.4) \quad x_1 \geq 0 \quad \text{ja}$$

$$(6.5) \quad x_2 \geq 0 .$$

Yhtälö (6.5) seuraa jo automaattisesti yhtälöstä (6.3), mutta siihen ei tarvitse kiinnittää tässä mitään huomiota. Yhtälöt (6.1) - (6.5) ovat tehtävän rajoitusepäyhtälöt. Huomaamme, että ne ovat kaikki lineaarisia muuttujien x_1 ja x_2 suhteen.

Piirretään seuraavaksi yhtälöiden (6.1) - (6.5) määräämät suorat koordinaatistoon, jossa akseleina on muuttujat x_1 ja x_2 , kuva 6.1.



Kuva 6.1. Esimerkkitehtävän muuttujataso

Suorien viereen on piirretty varjostus sille puolelle tasoa, jossa k.o. epäyhtälö on voimassa. Kuvasta 6.1 on helppo todeta, että tehtävän sallittu alue on nelikulmio ABCD.

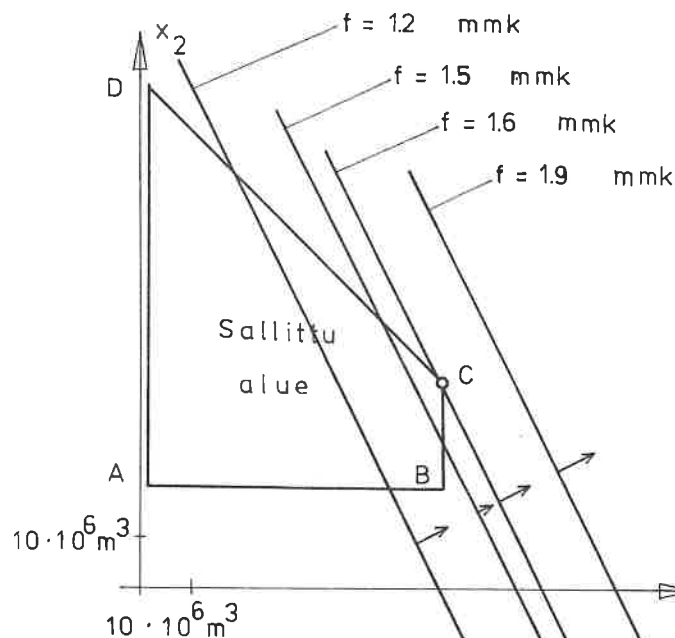
Kasteluun käytetystä vedestä saatiin hyötyä 2 p/m^3 ja voimalaitokseen ohjatusta vedestä 1 p/m^3 . Kohdefunktio on siis

$$(6.6) \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2.$$

Huomaamme taas, että $f(x_1, x_2)$ on muuttujien x_1 ja x_2 lineaarinen funktio.

Käsillä oleva optimointitehtävä voidaan nyt lausua seuraavasti: Sallitusta alueesta on etsittävä piste, jonka koordinaatit antavat $f(x_1, x_2)$:lle mahdollisimman suuren arvon.

Kuvaan 6.2 on piirretty taas (x_1, x_2) -taso sekä kaikki rajoitusepäyhtälöt toteuttavien pisteiden muodostama sallittu alue. Kuvaan on lisäksi piirretty joitakin kohdefunktion tasa-arvosuoria: suoria joiden jokaisessa pisteessä kohdefunktio saa saman arvon.



Kuva 6.2. Muuttujien sallittu alue ja kohdefunktion tasa-arvosuorat

Tasa-arvosuorien yhtälö on muotoa (6.7)

$$(6.7) \quad x_2 = -2x_1 + f.$$

Muutteleamalla f :n arvoa saadaan eri tasa-arvosuoria. Kaikki suorat ovat yhdensuuntaisia, ja suoraan liittyvä kohdefunktion arvo kasvaa siirryttäessä positiivisesta neljänneksestä ulospäin, nuolien suuntaan. Kuvasta 6.2 on helppo todeta, että optimiratkaisu löytyy nurkasta C. Optimointiongelman ratkaisu on siis:

$$\begin{cases} x_1 = 60 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \\ x_2 = 40 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \\ f(x_1, x_2) = 1.6 \text{ mmk} \end{cases}$$

Seuraavassa kootaan yhteen piirteet, jotka ovat tyypillisiä esimerkki-tehtävälle, samoin kuin lineaariselle optimoinnille yleensä. Kohdefunktio f on muuttujiensa $x_1, x_2, \dots, x_n$ lineaarinen funktio:

$$(6.8) \quad f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n.$$

Esimerkissä $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$.

Muuttujia rajoittaa joukko lineaarisia epäyhtälöitä, jotka kaikki optimiratkaisun on toteutettava:

$$(6.9) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

$$(6.10) \quad \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ \vdots \\ x_n \geq 0 \end{cases}$$

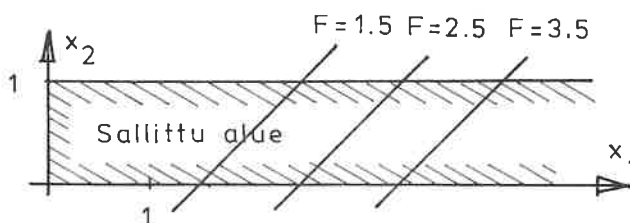
Esimerkissä

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100 \cdot 10^6 \\ x_1 \leq 60 \cdot 10^6 \\ -x_2 \leq -20 \cdot 10^6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Epäyhtälöitä voi olla enemmän, yhtä paljon tai vähemmän kuin päätösmuuttujia. Jos joku rajoitusyhtälö seuraa automaattisesti muista (vertaa (6.5)), sen voi jättää pois, mutta yhtä hyvin se voi olla mukana. Ei siis ole mitään tarvetta tarkistaa, onko epäyhtälöiden joukossa "ylimääräisiä". Epäyhtälöiden määräämä sallittu alue on esimerkissä suorien rajoittama monikulmio. Yleisesti, kun muuttujia on n kappaletta, on sallittu alue $n-1$ -dimensioisten tasojen rajoittama monitahokas. Kohdefunktion tasarvojoukot ovat $n-1$ -dimensioisia tasoja. Näistä seikoista johtuen optimipiste sijaitsee aina jossakin sallitun alueen kärjessä.

Yleensä sallittu alue on rajoitettu. Jos näin ei ole, saattaa kohdefunktio saada sallitulla alueella mielivaltaisen suuria arvoja, jolloin ongelmalla ei ole optimiratkaisua. Esimerkki: Maksimoitava $f = x_1 - x_2$ rajoituksilla $x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.



Kuva 6.3. Kohdefunktio saa sallitulla alueella mielivaltaisen suuria arvoja

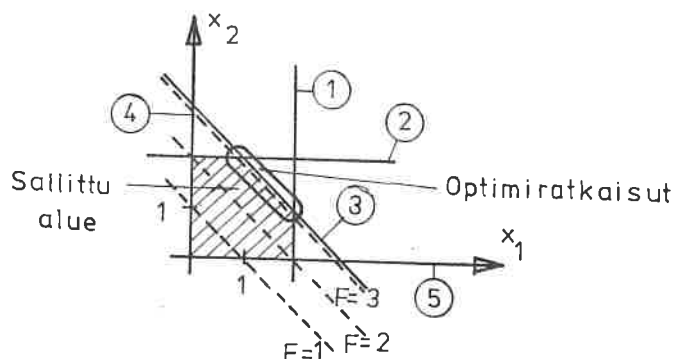
Voi käydä myös niin, että sallittu alue on tyhjä, t.s. epäyhtälöt eivät ole yhtäaikaa voimassa millään muuttujien arvoilla.

Esimerkki: Maksimoitava $f = x_1 + x_2$ rajoituksilla $x_1 \leq 1$, $x_2 \leq 1$, $x_1 + x_2 \geq 3$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. On helppo nähdä, että kolme ensimmäistä epäyhtälöä eivät voi koskaan olla yhtä aikaa voimassa. Ongelmalla ei ole ratkaisua.

Yleensä käytännön ongelmissa kuitenkin sallittu alue on rajoitettu, mutta ei tyhjä, joten edellä olevia vaikeuksia ei pääse syntymään.

Jos joku epäyhtälöiden määräämistä tasoista on saman suuntainen kuin kohdefunktion tasa-arvotasot, voi käydä niin, että optimi saavutetaan useissa sallitun alueen nurkissa. Tällöin on tämän tason sallittua aluetta rajoittavan osan jokainen piste optimipiste. Nyt tehtävän ratkaisu ei ole yksikäsitteinen. Optimiratkaisuihin voidaan sitten käytännön tarpeisiin valita mikä tahansa.

Esimerkki: Maksimoi $f = x_1 + x_2$ rajoituksin ① $x_1 \leq 2$, ② $x_2 \leq 2$, ③ $x_1 + x_2 \leq 3$, ④ $x_1 \geq 0$, ⑤ $x_2 \geq 0$,



Kuva 6.4. Esimerkki useista optimiratkaisuista

Nurkat $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ ja $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ ovat molemmat optimaalisia; samoin on jokainen piste näiden nurkkien välisellä suoran $x_1 + x_2 = 3$ osalla.

Lineaarisen optimoinnin tehtävässä voi esiintyä myös yhtälörajoituksia. Näistä voitaisiin jokaisesta yksi muuttuja ratkaista toisten avulla ja sijoittaa sille saatava lauseke muihin yhtälöihin, epäyhtälöihin ja kohdefunktioon. Tietokonetta käytettäessä tätä ei kuitenkaan tarvitse tehdä, vaan yhtälörajoitukset voidaan ottaa mukaan sellaisinaan.

Seuraavaksi tarkastellaan hieman laajempaa esimerkkiä. Viikon aikana on altaasta, jonka varastotila on $10 \cdot 10^6 \text{ m}^3$, juoksutettava vettä kahdelle kastelualueelle (määrät x_1 ja x_2), teollisuuslaitokselle (määrä x_3) ja voimalaitokseen (määrä x_4). Molemmilla kastelualueilla saadaan hyötyä 2 p/m^3 , teollisuuslaitokselle pumputtavasta vedestä tulee hyötyä $0,5 \text{ p/m}^3$ ja voimalaitoksen tuottama hyöty on 1 p/m^3 . Ensimmäiselle kastelualueelle voidaan pumpata korkeintaan $6 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ ja toiselle korkeintaan $4 \cdot 10^6 \text{ m}^3$. Yhteisen lähtöputken kapasiteetista johtuen voidaan alueille yhteensä pumpata korkeintaan $8 \cdot 10^6 \text{ m}^3$. Teollisuuslaitos voi käyttää enintään $2 \cdot 10^6 \text{ m}^3$, ja se tarvitsee

vettä vähintään 10^6 m^3 . Voimalaitokseen voidaan juoksuttaa vettä korkeintaan $8 \cdot 10^6 \text{ m}^3$.

Kohdefunktioksi saadaan

$$(6.11) \quad f = 2x_1 + 2x_2 + 0,5x_3 + x_4,$$

ja rajoitusepäyhtälöiksi

$$(6.12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \leq 10 \cdot 10^6 \\ x_1 & \leq 6 \cdot 10^6 \\ x_2 & \leq 4 \cdot 10^6 \\ x_1 + x_2 & \leq 8 \cdot 10^6 \\ x_3 & \leq 2 \cdot 10^6 \\ -x_3 & \leq -1 \cdot 10^6 \\ x_4 & \leq 8 \cdot 10^6 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{array} \right.$$

Nyt kun vakiot a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, b_i , $i = 1, 2, \dots, m$ ja c_j , $j = 1, 2, \dots, n$ (vrt. (6.9), (6.10)) tunnetaan, tehtävä voidaan koodata tietokoneelle kirjasto-ohjelman ohjeiden mukaan, ja koneelta saadaan valmis ratkaisu.

Yhtälöt (6.8) - (6.10) esitetään usein matriisimuodossa: Maksimoitava $f = \underline{c} \underline{x}$ rajoituksin $\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}$, $\underline{x} \geq \underline{0}$. Viimeinen esimerkkitehtävä on matriisimuodossa kirjoitettuna:

$$\max (2, 2, \frac{1}{2}, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ rajoituksin } \begin{pmatrix} 1, 1, 1, 1 \\ 1, 0, 0, 0 \\ 0, 1, 0, 0 \\ 1, 1, 0, 0 \\ 0, 0, 1, 0 \\ 0, 0, -1, 0 \\ 0, 0, 0, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \cdot 10^6 \\ 6 \cdot 10^6 \\ 4 \cdot 10^6 \\ 8 \cdot 10^6 \\ 2 \cdot 10^6 \\ -1 \cdot 10^6 \\ 8 \cdot 10^6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jokaiseen lineaariseen optimointitehtävään liittyy n.k. duaalitehtävä, joka on myös lineaarinen. Se muodostuu samoista parametreistä kuin alkuperäinen tehtävä, mutta parametrien roolit ovat vaihtuneet.

Lineaarisen optimointitehtävän

$$\text{maksimoitava } f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$\text{rajoituksin } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0,$$

tai matriisimuodossa

$$\text{maksimoitava } f = \underline{c} \underline{x}$$

$$\text{rajoituksin } \underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}, \quad \underline{x} \geq \underline{0},$$

duaalitehtävä, missä muuttujia on merkitty y_i :llä, on seuraava:

$$\text{minimoitava } g = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$$

$$\text{rajoituksin } \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0,$$

ja matriisimuodossa

$$\text{minimoitava } g = \underline{b} \underline{y}$$

$$\text{rajoituksin } \underline{A} \underline{y} \geq \underline{c}, \quad \underline{y} \geq \underline{0}.$$

Kutsumme jatkossa alkuperäistä lineaarisen optimoinnin tehtävää primaalitehtäväksi. Primaalitehtävää ja sen duaalitehtävää tarkasteltaessa todetaan, että edellisessä on muuttujia yhtä paljon kuin jälkimmäisessä epäyhtälörajoituksia, n kpl (kun positiivisuusepäyhtälöt jätetään pois laskusta). Samoin

edellisessä on epäyhtälörajoituksia saman verran kuin jälkimmäisessä muuttujia, m kpl. Edelleen, kohdefunktion parametrit ja epäyhtälörajoitusten vakiot vaihtavat primaali- ja duaalitehtävissä paikkaa, epäyhtälörajoitusten matriisi A on duaalitehtävässä transponoitu A^T , epäyhtälöiden suunta muuttuu (paitsi positiivisuusepäyhtälöissä), ja primaalitehtävän maksimointi vaihtuu duaalitehtävässä minimoinniksi. On helppo todeta, että jos edellä esitetylle duaalitehtävälle muodostetaan vielä duaalitehtävä, tuloksena on alkuperäinen primaalitehtävä. Näin ollen primaalitehtävä on luonteeltaan aivan samanlainen kuin sen duaalitehtäväkin, ja on täysin samantekevää, kumpaa tehtävistä kutsutaan primaalitehtäväksi ja kumpaa duaalitehtäväksi. Kyseiset tehtävät muodostavat symmetrisen duaalisen parin. Tätä symmetriaa voidaan kuvata oheisella taulukolla:

$$\begin{array}{c}
 x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \quad -1 \\
 \\
 \begin{array}{c}
 y_1 \\
 y_2 \\
 \vdots \\
 y_m \\
 -1
 \end{array}
 \begin{array}{|cc|}
 \hline
 a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n} & b_1 \\
 a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n} & b_2 \\
 \vdots & \vdots \\
 a_{m1} \ a_{m2} \ \dots \ a_{mn} & b_m \\
 \hline
 c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n & 0
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \leq 0 \\
 \leq 0 \\
 \vdots \\
 \leq 0 \\
 = \underline{cx} \text{ (max)}
 \end{array}
 \\
 \geq 0 \geq 0 \ \dots \geq 0 = \underline{by} \text{ (min)}
 \end{array}$$

Primaalitehtävä saadaan lukemalla taulukkoa vaakasuoraan, kertomalla ylhäällä oleva muuttuja neliössä olevalla vakiolla ja laskemalla yhteen yli vaakarivin. Duaalitehtävä puolestaan saadaan lukemalla taulukkoa pystysuoraan. Sivulla olevat muuttujat kerrotaan neliössä olevilla vakioilla ja lasketaan yhteen pitkin pystyriviä.

Lineaarisen optimointitehtävän ja sen duaalitehtävän muodostamalla parilla on seuraavat ominaisuudet:

- 1^o Primaalitehtävällä on ratkaisu silloin ja vain silloin, kun sekä primaali- että duaalitehtävän sallittu alue on ei-tyhjä. Tällöin molempien kohde-

funktioiden optimiarvo on sama.

- 2^o Maksimoitavan kohdefunktion arvo on jokaisessa sen sallitun alueen pisteessä pienempi tai yhtä suuri kuin minimoitavan kohdefunktion arvo missä tahansa sen sallitun alueen pisteessä.
- 3^o Jos toisella tehtävällä on sallittuja ratkaisuja mutta toisella ei, saa edellisen tehtävän kohdefunktio sallitulla alueella itseisarvoltaan mieltävaltaisen suuria arvoja ja kääntäen. Tällöin kummallakaan tehtävällä ei ole optimiratkaisua.
- 4^o Edellä olevasta taulukosta nähdään, että tehtävän jokaista epäyhtälörajoitusta vastaa sen duaalitehtävän eräs muuttuja ja vastaavasti jokaista muuttujaa sen duaalitehtävän eräs epäyhtälörajoitus. Jos tehtävän optimipisteessä jokin epäyhtälörajoitus toteutuu yhtälönä, niin duaalitehtävän vastaava muuttuja on tämän tehtävän optimipisteessä positiivinen. Jos taas tehtävän optimipisteessä joku epäyhtälörajoitus toteutuu epäyhtälönä, niin duaalitehtävän vastaava muuttuja on tämän tehtävän optimipisteessä nolla.

Edellä esitetty kahden lineaarisen optimointitehtävän välinen duaalisuus esiintyy huomattavasti yleisempienkin optimointitehtävien yhteydessä. Ominaisuus

1^o on n.k. min-max teoreeman eräs seuraus. Paitsi teoreettista mielenkiintoa on duaalisuudella myös jotakin käytännön merkitystä. Ominaisuuden 2^o nojalla saadaan maksimoitavan funktion optimiarvolle yläraja laskemalla duaalitehtävän kohdefunktion arvo jossakin sen sallitun alueen pisteessä.

Ominaisuuden 4^o nojalla jomman kumman tehtävän ratkaisusta saadaan helposti myös toisen tehtävän ratkaisu. Näin ollen tehtävästä ja sen duaalitehtävästä tarvitsee ratkaista vain se joka on helpompi.

Tarkastellaan vielä duaalista tehtäväparia

$$\begin{array}{ll}
 \text{maksimoitava} & f = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \\
 \text{rajoituksin} & a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m \\
 & x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0
 \end{array}$$

ja

$$\text{minimoitava} \quad g = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m$$

$$\text{rajoituksin} \quad a_{11} y_1 + \dots + a_{m1} y_m \geq c_1$$

$$\vdots$$

$$a_{1n} y_1 + \dots + a_{mn} y_m \geq c_n$$

$$y_1 \geq 0, \dots, y_m \geq 0.$$

Muodostetaan edellisen tehtävän kohdefunktion Lagrangen kertojien tekniikkaan liittyvä modifikaatio:

$$(6.13) \quad B = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n + y_1 (b_1 - a_{12} x_1 - \dots - a_{1n} x_n) + \dots + y_m (b_m - a_{m1} x_1 - \dots - a_{mn} x_n),$$

missä $y_1, y_2, \dots, y_m$ ovat primaalitehtävän Lagrangen kertojat. Syy siihen, että näitä on merkitty samoilla symboleilla kuin duaalitehtävän muuttujia, selviää kohta. Duaalitehtävän kohdefunktion Lagrangen modifikaatioksi saadaan

$$(6.14) \quad D = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m + x_1 (c_1 - a_{12} y_1 - \dots - a_{m1} y_m) + \dots + x_n (c_n - a_{1n} y_1 - \dots - a_{mn} y_m),$$

missä $x_1, \dots, x_n$ ovat puolestaan duaalitehtävän Lagrangen kertojat. Yhtälöistä (6.13) ja (6.14) todetaan, että formaalisti B ja D ovat samat muuttujiansa $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ funktiot. Tästä seuraa, että duaalitehtävän muuttujien arvot optimipisteessä voidaan tulkita primaalitehtävän kohdefunktion optimiarvon herkkyyksiksi rajoitusepäyhtälöiden vakioiden $b_1, \dots, b_m$ muutuoksille (vrt. luvun 4 herkkyyksianalyysi). Samoin tietysti primaalitehtävän muuttujien arvot optimipisteessä voidaan tulkita duaalitehtävän kohdefunktion optimiarvon herkkyyksiksi rajoitusepäyhtälöiden vakioiden $c_1, \dots, c_n$ muutoksille. Siis molempien tehtävien optimipisteissä

$$\frac{\partial f}{\partial b_i} = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad \frac{\partial g}{\partial c_i} = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Duaalitehtävän muuttujien optimiarvot esittävät siis primaalitehtävän varjohintoja, ja kääntäen primaalitehtävän muuttujien optimiarvot ovat duaalitehtävän varjohinnat.

Numeeriset tietokoneohjelmat antavat paitsi primaalitehtävän optimiratkaisun myös herkkyydet sekä rajoitusepäyhtälöiden parametrien $b_1, \dots, b_m$ että kohdefunktion parametrien $c_1, \dots, c_n$ suhteen.

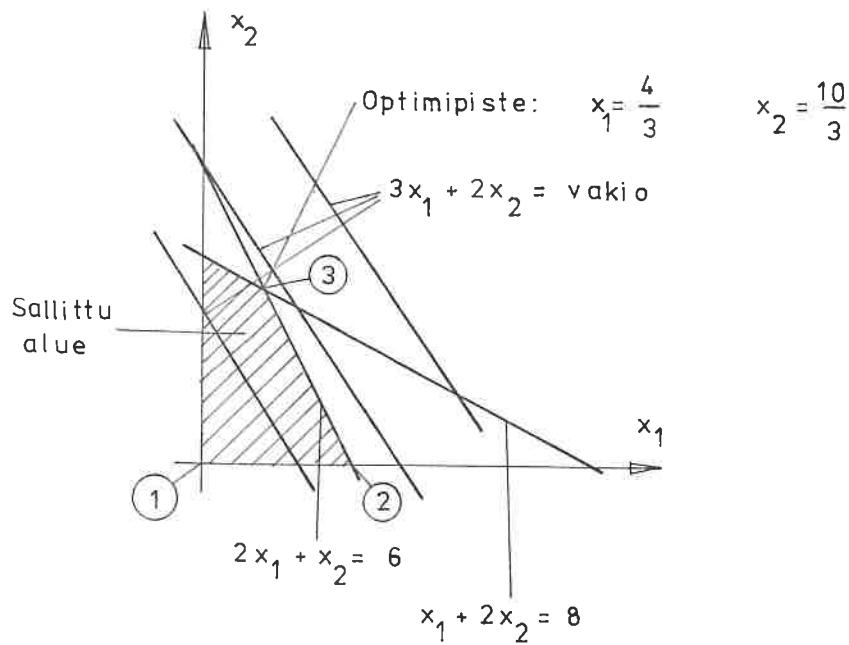
Jos lineaarisen optimoinnin tehtävällä on vain kaksi tai kolme muuttujaa, tehtävä voidaan ratkaista geometrisien tarkastelujen avulla. Käytännön tarkoituksiin tämä on tietenkin täysin riittämätöntä. Tietokoneohjelmat ratkaisevat lineaarisen optimoinnin tehtävät numeerisella algoritmilla, jota kutsutaan simplex-algoritmiksi.

Jotta lukija saisi jonkinlaisen käsityksen tästä algoritmista, tarkastellaan sitä yksinkertaisen esimerkin valossa. Algoritmin yksityiskohtaisempaan esittelyyn emme kuitenkaan ryhdy.

Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{array}{ll} \text{maksimoitava} & f = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{rajoituksin} & \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Kuvassa 6.5 on tehtävä ratkaistu geometrisesti.



Kuva 6.5. Simplex-algoritmin kulku

Määritellään kaksi uutta muuttujaa, s_1 ja s_2 .

$$s_1 = 6 - 2x_1 - x_2$$

$$s_2 = 8 - x_1 - 2x_2$$

Tarkastelemalla epäyhtälörajoituksia havaitaan, että sallitulla alueella s_1 ja s_2 ovat ei-negatiivisia. Ne itse asiassa juuri ilmoittavat, minkä verran epäyhtälörajoitusten vasen puoli on pienempi kuin oikea, kuinka suurella marginaalilla rajoitukset ovat voimassa. Näitä uusia muuttujia s_1 ja s_2 kutsutaan pelivaramuuttujiksi (tai slackmuuttujiksi engl. termin slack variable mukaan). Pelivaramuuttujia käyttämällä epäyhtälörajoitukset voidaan kirjoittaa yhtälörajoituksiksi:

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 8$$

Simplex algoritmi lähtee liikkeelle jostakin sallitun alueen nurkasta, usein origosta (kuvassa merkitty (1) :llä). Tässä nurkassa $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $s_1 = 6$, $s_2 = 8$ ja $f = 0$. Seuraavaksi ratkaistaan rajoitusyhtälöistä ne muuttujat, jotka eivät ole nollia, n.k. kantamuuttujat, niiden muuttujien suhteen jotka ovat nollia:

$$(6.15) \quad s_1 = 6 - 2x_1 - x_2$$

$$(6.16) \quad s_2 = 8 - x_1 - 2x_2,$$

sekä lausutaan kohdefunktio niiden muuttujien avulla, jotka ovat nollia:

$$f = 3x_1 + 2x_2.$$

Seuraavaksi siirrytään sallitun alueen johonkin viereiseen nurkkaan siten, että kohdefunktion arvo paranee: Jokaisesta nollana olevasta muuttujasta katsotaan, kuinka paljon sitä voidaan kasvattaa rajoituksia rikkomatta, ja kuinka paljon kohdefunktio tällöin kasvaa. Yhtälöistä (6.15) ja (6.16) nähdään, että x_1 voi kasvaa kolmeen ja x_2 neljään (erikseen, eivät yhtä aikaa). Edellisessä tapauksessa kohdefunktio kasvaa yhdeksällä, jälkimmäisessä kahdeksalla. Valitaan jompi kumpi näistä tapauksista, esimerkiksi se jossa kohdefunktion arvo kasvaa enemmän, ja asetetaan $x_1 = 3$, jolloin $s_1 = 0$, $s_2 = 5$, $f = 9$ ja x_2 edelleen nolla. Nyt ollaan nurkassa (2). Muuttuja x_1 ei ole enää nolla, mutta s_1 on : x_1 on korvannut kannassa s_1 : n. Algoritmi on suorittanut kannan vaihdon. Tämä on simplex-algoritmin keskeinen idea.

Seuraavaksi toistetaan edellä esitetty askel:

Kantamuuttujat (jotka eivät ole (2) :ssa nollia) ja kohdefunktio lausutaan nollana olevien muuttujien avulla:

$$x_1 = 3 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}s_1$$

$$s_2 = 5 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}s_1$$

$$f = 9 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}s_1,$$

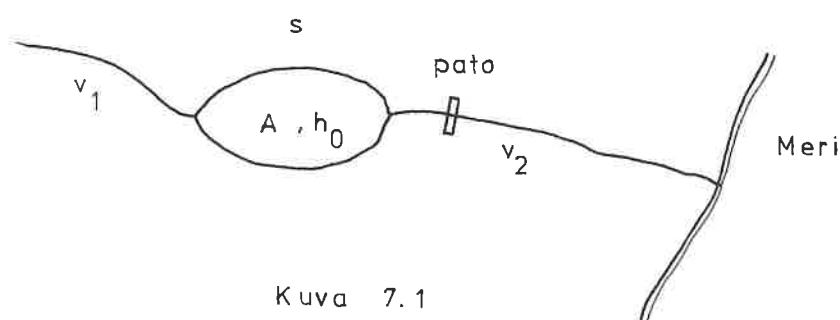
jokaisesta nollana olevasta muuttujasta katsotaan, kuinka paljon se voi kasvaa rajoituksia rikkomatta sekä paljonko kohdefunktion arvo tällöin muuttuu. x_2 voi kasvaa $\frac{10}{3}$:aan jolloin f kasvaa $10\frac{2}{3}$:aan. s_1 :n kasvattaminen pienentää kohdefunktion arvoa, joten tämä ei tule kysymykseen. Asetetaan siis $x_2 = \frac{10}{3}$, jolloin $s_2 = 0$, $x_1 = \frac{4}{3}$ ja $f = \frac{32}{3}$. (s_1 on edelleen nolla). On suoritettu uusi kannan vaihto ja siirrytty nurkkaan (3).

Toistettaessa sama askel vielä kerran havaitaan, että nollana olevien muuttujien ($s_1 : n$ ja $s_2 : n$) kasvattaminen vain vähentää kohdefunktion arvoa. Siis optimipiste on löytynyt: $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{10}{3}$, $f = \frac{32}{3}$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$. Pelivaramuuttujat ovat nolliä tässä pisteessä, kuten pitääkin, koska epäyhtälörajoitukset kuvan 6.5 mukaan toteutuvat yhtälöinä.

Tällainen on Simplex-algoritmin kulku. Kaikki edellä olevat askeleet voidaan helposti ohjelmoida tietokoneelle. Suuremmissa tietokoneohjelmissa käytetään Simplex-algoritmin erilaisia modifikaatioita. Yhtenä esimerkkinä mainittakoon n.k. revised simplex.

7. Moniasteiset päätöksentekoprosessit, dynaaminen optimointi

Niitä fysikaaliseen systeemiin liittyviä parametreja, jotka eivät ole vapaasti kontrolloitavissa, mutta jotka ovat mukana kohdefunktiossa, kutsuttiin kolmannessa luvussa tilamuuttujiksi. Tilamuuttujien ohjaus tapahtuu päätösmuuttujien avulla, ja ne määräytyvät yksikäsitteisesti systeemin päätösmuuttujista, stokastisista parametreista sekä fysikaalisista vakioista. Tyypillinen esimerkki tilamuuttujista on vesistön säännöstelyssä altaan pinnan korkeus toimintajakson esim. kuukauden lopussa, kuva 7.1.



Kuva 7.1. Yhden altaan säännöstelymalli

Päätösmuuttujia on yksi, laskujoen juoksutus toimintajakson aikana v_2 (m^3). Stokastiset parametrit ovat toimintajakson aikana altaaseen tulevat vesimäärät v_1 (valuma-alueelta) sekä s (altaaseen tulevan sadannan ja haihdunnan erotus). Fysikaaliset vakiot ovat pinta-ala A ja pinnan korkeus jakson alussa, h_0 . Tilamuuttuja h_1 , pinnan korkeus jakson lopussa, määräytyy nyt edellisistä parametreista:

$$h_1 = h_0 + \frac{1}{A} (v_1 + s - v_2).$$

Fysikaalisen systeemin parametrien jako toisaalta päätösmuuttujiin ja toisaalta tilamuuttujiin ei ole mitenkään yksikäsitteinen vaan suunnittelija voi tehdä valinnan useista vaihtoehdoista. Jos esim. tarkasteltava fysikaalinen systeemi on sähkövästus R , jonka lävitse kulkee virta, voidaan virtaa I pitää päätösmuuttujana ja vastuksen yli vallitsevaa jännitettä U tästä aiheutuvana tilamuuttujana:

$$U = R I.$$

alussa (alkuarvo) on h_0 . Tilamuuttujan arvo i :n jakson lopussa, h_i , määräytyy sen arvosta kyseisen jakson alussa, h_{i-1} , sekä tämän jakson alussa valitusta päätösmuuttujan arvosta, u_{i-1} .

$$(7.1) \quad h_i = f_i(x_{i-1}, h_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Kullakin jaksolla i on oma kohdefunktionsa $F_i(x_{i-1}, h_i)$, joka riippuu jakson alussa tehdystä päätöksestä x_{i-1} sekä tilamuuttujan arvosta h_i jakson lopussa, ja koko tehtävän kohdefunktion F on jaksojen kohdefunktioiden summa:

$$(7.2) \quad F = F_1(x_0, h_1) + F_2(x_1, h_2) + \dots + F_n(x_{n-1}, h_n) \\ = \sum_{i=1}^n F_i(x_{i-1}, h_i).$$

Kullakin jaksolla sekä päätösmuuttujien että tilamuuttujien on toteutettava annetut rajoitukset:

$$(7.3) \quad x_{i-1} \in X_{i-1} \\ i = 1, 2, \dots, n,$$

$$(7.4) \quad h_i \in H_i$$

missä kukin X_{i-1} ja H_i on joku reaaliakselin osajoukko. Edellisissä luvuissa rajoitusehdot annettiin epäyhtälöiden avulla; dynaamisen optimoinnin tapauksessa spesifiointi yhtälöiden (7.3), (7.4) esittämällä tavalla on sopivampi. Yhtälö (7.3) määrää ohjausrajoitukset (tai päätösrajoitukset) ja yhtälö (7.4) tilarajoitukset. Tehtävä on nyt seuraava:

$$\text{maksimoitava} \quad F = \sum_{i=1}^n F_i(x_{i-1}, h_i)$$

$$\text{rajoituksin} \quad x_{i-1} \in X_{i-1} \\ i = 1, 2, \dots, n, \\ h_i \in H_i$$

missä h_0 on annettu ja

$$h_i = f_i(x_{i-1}, h_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Kysymyksessä on tyypillinen dynaamisen optimoinnin tehtävä. Seuraavassa tarkastellaan dynaamista optimointia esimerkin avulla.

Jaksoja on kolme, samoin päätösmuuttujia:

x_0, x_1, x_2 . Tilamuuttujat ovat h_1, h_2, h_3 , ja alkutila $h_0 = 2$. Tiloja ohjataan yhtälöiden

$$h_1 = f_1(x_0, h_0) = x_0 + h_0,$$

$$h_2 = f_2(x_1, h_1) = x_1 + h_1,$$

$$h_3 = f_3(x_2, h_2) = x_2 + h_2$$

avulla. Ohjausrajoitukset ovat

$$x_0 \in X_0 = \{-1, 0, 1\},$$

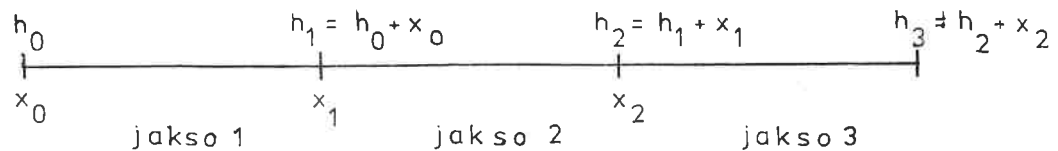
$$x_1 \in X_1 = \{-1, 0, 1\},$$

$$x_2 \in X_2 = \{-1, 0, 1\}.$$

Siis kukin päätösmuuttuja voi saada vain kolme mahdollista arvoa: -1, 0 ja 1. Tilarajoituksia ei ole. Kohdefunktio, joka halutaan minimoida, on

$$\begin{aligned} F &= F_1(x_0, h_1) + F_2(x_1, h_2) + F_3(x_2, h_3) \\ &= x_0^2 + (h_1 - 2)^2 + x_1^2 + (h_2 - 4)^2 + x_2^2 + (h_3 - 1)^2. \end{aligned}$$

Kuva 7.2 esittää tilannetta.



$$F = x_0^2 + (h_1 - 2)^2 + x_1^2 + (h_2 - 4)^2 + x_2^2 + (h_3 - 1)^2$$

Kuva 7.2. Esimerkkitehtävän jaksot sekä tila- ja päätösmuuttujat

Ongelmaa lähdetään ratkaisemaan lopusta päin. Viimeinen päätösmuuttuja x_2 vaikuttaa vain kohdefunktion viimeisen jakson termiin $x_2^2 + (h_3 - 1)^2$. Parasta x_2 :ta ei voi kuitenkaan suoraan määrätä, sillä h_3 riippuu paitsi x_2 :sta myös h_2 :sta. Voidaan kuitenkin määrätä paras x_2 h_2 :n funktiona: $x_2^*(h_2)$. Kun otetaan huomioon, että x_2 voi saada vain arvot -1, 0, 1, voidaan $F_3 = x_2^2 + (h_3 - 1)^2 = x_2^2 + (h_2 + x_2 - 1)^2$ helposti minimoida h_2 :n funktiona:

h_2	$x_2^*(h_2)$	$F_3^*(h_2)$
-2	1	5
-1	1	2
0	1 tai 0	1
1	0	0
2	0 tai -1	1
3	-1	2
4	-1'	5

Taulukko 7.1

Taulukossa 7.1 on esitetty joitakin h_2 :n arvoja sekä näihin liittyvät paras $x_2^*(h_2)$ sekä optimikustannuksen "loppupää" $F_3^*(h_2)$. Nyt tiedetään, kuinka toisen jakson lopusta on paras edetä tehtävän loppuun, olipa tilamuuttuja toisen jakson lopussa mikä tahansa. Tiedetään myös parhaaseen loppuaskeleeseen liittyvä kustannus h_2 :n funktiona.

Otetaan yksi askel taaksepäin. Jos toisen jakson alussa tilamuuttuja on h_1 ja jos tehdään päätös x_1 , on jakson kustannus $F_2 = x_1^2 + (h_2 - 4)^2 = x_1^2 + (x_1 + h_1 - 4)^2$, ja jakson päätyttyä $h_2 = h_1 + x_1$. Optimikustannus tästä loppuun on $F_3^*(h_1 + x_1)$. Paras päätös x_1 on siis se, joka minimoi

näiden summan $x_1^2 + (x_1 + h_1 - 4)^2 + F_3^*(h_1 + x_1)$. Eksplisiittisesti ei parasta x_1 :tä voi määrätä, koska minimoitavassa lausekkeessa esiintyy h_1 , tilamuuttujan arvo tilanteen alussa, mutta paras x_1 voidaan taas määrätä h_1 :n funktiona: $x_1^*(h_1)$. Kokeilemalla x_1 :n kolmea mahdollista arvoa ja käyttämällä taulukkoa 7.1 saadaan taulukko 7.2.

h_1	$x_1^*(h_1)$	$F_2^*(h_1)$	
-1	1	18	
0	1	10	
1	1	6	Taulukko 7.2
2	1	4	
3	0	3	
4	-1	4	
5	-1	6	

Taulukosta nähdään paras x_1 h_1 :n funktiona, $x_1^*(h_1)$, sekä $F_2^*(h)$, joka ilmoittaa kustannuksen toisen jakson alusta kolmannen loppuun, kun edetään parhaalla mahdollisella tavalla. $F_2^*(h_1)$ on siis loppupään optimikustannus. Viimeinen askel on edellisen kaltainen. Sen tekee hieman helpommaksi se, että tilamuuttuja ensimmäisen jakson alussa tunnetaan: $h_0 = 2$. Jos tämän jakson alussa tehdään päätös x_0 , on $h_1 = h_0 + x_0 = 2 + x_0$. Ensimmäisen jakson kustannus on $F_1 = x_0^2 + (h_1 - 2)^2 = x_0^2 + (2 + x_0 - 2)^2 = 2x_0^2$. Päätöksellä x_0 on loppupään optimikustannus $F_2^*(h_1) = F_2^*(2 + x_0)$. On kolme mahdollisuutta valita x_0 . Taulukossa 7.3 on esitetty valintoihin liittyvät ensimmäisen jakson kustannus, loppupään optimikustannus sekä koko tehtävän kustannus, joka on siis edellisten summa.

x_0	$F_1 = 2x_0^2$	$F_2^*(2 + x_0)$	F	
-1	2	6	8	
0	0	4	4	Taulukko 7.3
1	2	3	5	

Tehtävä on nyt ratkaistu. Paras x_0 on $x_0^* = 0$. Tällöin $h_1 = 2$, paras x_1 on $x_1^*(2) = 1$, $h_2 = 3$ ja paras x_2 on $x_2^*(3) = -1$. Taulukon 7.3 mukaan optimikustannus $F^* = 4$. Suoritetaan tarkistus: $F^* = x_0^{*2} + (x_0^* + h_1 - 2)^2 + x_1^{*2} + (x_1^* + h_2 - 4)^2 + x_2^{*2} + (x_2^* + h_3 - 1)^2 = 0^2 + (0 + 2 - 2)^2 + 1^2 + (1 + 2 - 4)^2 + (-1)^2 + (-1 + 3 - 1)^2 = 4$.

Jos viimeinen askel olisi suoritettu samassa laajuudessa kuin keskimäinen, optimiratkaisu olisi saatu alkutilan h_0 funktiona:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0(h_0) \\ x_1 &= x_1(h_1) = x_1(h_0 + x_0(h_0)) \\ x_2 &= x_2(h_2) = x_2(h_0 + x_0(h_0) + x_1(h_0 + x_0(h_0))) \\ x_3 &= x_3(h_3) = \\ &= x_3(h_0 + x_0(h_0) + x_1(h_0 + x_0(h_0)) + x_2(h_0 + x_0(h_0) + \\ &\quad + x_1(h_0 + x_0(h_0))))). \end{aligned}$$

Seuraavaksi esitetään dynaamisen optimoinnin ratkaisun yleinen kulku, kun sekä tila- että päätösmuuttujia on yksi. Tehtävä on seuraava:

$$\text{maksimoitava } F = \sum_{i=1}^n F_i(x_{i-1}, h_i)$$

$$\begin{aligned} \text{rajoituksin } x_{i-1} &\in X_{i-1} \\ h_i &\in H_i \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

kun h_0 tunnetaan, ja

$$h_i = f_i(x_{i-1}, h_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ratkaisu lähtee liikkeelle lopusta päin. Ensimmäisessä vaiheessa on h_{n-1} :n funktiona maksimoitava $F_n(x_{n-1}, h_n) = F_n(x_{n-1}, f_n(x_{n-1}, h_{n-1}))$ siten, että jokaisella h_{n-1} :n arvolla rajoitukset $x_{n-1} \in X_{n-1}$ ja

$h_n = f_n(x_{n-1}, h_{n-1}) \in H_n$ ovat voimassa. Merkitään tehtävän ratkaisua $x_{n-1}^*(h_{n-1})$:llä ja vastaavaa optimikustannusta $F_n^*(h_{n-1})$:llä. Siis

$$F_n^*(h_{n-1}) = F_n(x_{n-1}^*(h_{n-1}), f_n(x_{n-1}^*(h_{n-1}), h_{n-1})).$$

Nyt $x_{n-1}^*(h_{n-1})$ kertoo, mikä on paras x_{n-1} :n valinta, olipa tilamuuttujan arvo viimeisen jakson alussa mikä tahansa. $F_n^*(h_{n-1})$ kertoo vastaavasti loppupään optimaalisen kustannuksen.

Seuraavaksi otetaan yksi askel taaksepäin. Jos tilamuuttujan arvo tämän jakson alussa on h_{n-2} ja jos tehdään päätös x_{n-2} , on $h_{n-1} = f_{n-1}(x_{n-2}, h_{n-2})$ ja jaksoon liittyvä kustannus $F_{n-1}(x_{n-2}, h_{n-1}) = F_{n-1}(x_{n-2}, f_{n-1}(x_{n-2}, h_{n-2}))$.

Jakson lopusta tehtävän loppuun optimikustannus on $F_n^*(h_{n-1}) =$

$= F_n^*(f_{n-1}(x_{n-2}, h_{n-2}))$. Paras x_{n-2} on siis se, joka maksimoi näiden kahden kustannuksen summan, ja $x_{n-2}^*(h_{n-2})$ saadaan seuraavan maksimointitehtävän ratkaisuna:

h_{n-2} :n funktiona on maksimoitava

$$F_{n-1}(x_{n-2}, f_{n-1}(x_{n-2}, h_{n-2})) + F_n^*(f_{n-1}(x_{n-2}, h_{n-2}))$$

siten, että $h_{n-1} = f_{n-1}(x_{n-2}, h_{n-2}) \in H_{n-1}$ ja $x_{n-2} \in X_{n-2}$.

Optimikustannus on siis

$$F_{n-1}^*(h_{n-2}) = F_{n-1}(x_{n-2}^*(h_{n-2}), f_{n-1}(x_{n-2}^*(h_{n-2}), h_{n-2})) + F_n^*(f_{n-1}(x_{n-2}^*(h_{n-2}), h_{n-2})),$$

ja se ilmoittaa kohdefunktion kahden viimeisen termin summan arvon, kun tilamuuttujan arvosta h_{n-2} edetään optimaalisesti (valinnoin $x_{n-2}^*(h_{n-2})$ ja $x_{n-1}^*(h_{n-1})$) tehtävän loppuun.

Tätä menettelyä jatketaan kohti tehtävän alkua. Yleinen askel on seuraava:

Olkoon i :nnen jakson alussa tilamuuttujan arvo h_{i-1} . Jos jakson alussa tehdään päätös x_{i-1} , on $h_i = f_i(x_{i-1}, h_{i-1})$ ja jakson kustannus $F_i(x_{i-1}, h_i) = F_i(x_{i-1}, f_i(x_{i-1}, h_{i-1}))$. Optimikustannus jakson lopusta tehtävään loppuun h_i :n funktiona tunnetaan edellisestä askeleesta: $F_{i+1}^*(h_i) = F_{i+1}^*(f_i(x_{i-1}, h_{i-1}))$. Jälleen paras x_{i-1} on se joka minimoi näiden summan. Siis $x_{i-1}^*(h_{i-1})$ saadaan tehtävän

$$\text{maksimoitava } F_i(x_{i-1}, f_i(x_{i-1}, h_{i-1})) + F_{i+1}^*(f_i(x_{i-1}, h_{i-1}))$$

$$\text{rajoituksin } h_i = f_i(x_{i-1}, h_{i-1}) \in H_i, x_{i-1} \in X_{i-1})$$

ratkaisuna. Kun optimointi h_{i-1} :n funktiona on suoritettu ja $x_{i-1}^*(h_{i-1})$ löytynyt, voidaan määrätä uusi loppupään optimikustannus:

$$F_i^*(h_{i-1}) = F_i(x_{i-1}^*(h_{i-1}), f_i(x_{i-1}^*(h_{i-1}), h_{i-1})) + F_{i+1}(f_i(x_{i-1}^*(h_{i-1}), h_{i-1}), h_{i-1}).$$

Näin edetään tehtävän alkuun saakka. Koko tehtävän optimikustannus saadaan sijoittamalla tunnettu h_0 viimeisessä vaiheessa laskettuun funktioon $F_1^*(h_0)$. Paras x_0 on $x_0^*(h_0)$, $h_1 = f_1(x_0, h_0)$, paras x_1 on $x_1^*(h_1)$, $h_2 = f_2(x_1, h_1)$, paras x_2 on $x_2^*(h_2)$, ..., $h_{n-1} = f_{n-1}(x_{n-2}, h_{n-2})$, paras x_{n-1} on $x_{n-1}^*(h_{n-1})$ ja $h_n = f_n(x_{n-1}, h_{n-1})$.

Dynaamisen optimoinnin tehtävän ratkaisussa monen muuttujan tehtävä hajoitettiin useaksi yhden muuttujan optimointitehtäväksi. Kullekin jaksolle saatiin oma maksimointitehtävä. Vaikeutena osatehtävien optimoinnissa on se, että maksimointi joudutaan suorittamaan parametrin, jakson alkuun liittyvän tilamuuttujan, funktiona. Käytännön tehtäviä ratkaistaessa, jolloin analyttiset menetelmät eivät tule kysymykseen, on parasta diskretoida tilamuuttujien arvot. Jokainen H_i , joka yleensä on rajoitettu joukko, korvataan äärellisellä määrällä arvoja, ja tilamuuttujan h_i sallitaan saada vain nämä arvot. Osatehtävän optimointi suoritetaan sitten erikseen jokaiselle tilamuuttujan sallitulle arvolle, ja optimointien tulokset taulukoidaan muistiin. Osatehtävien optimoinneissa voidaan käyttää edellisissä luvuissa esille tulleita menetelmiä, lähinnä Lagrangen kertojia, gradienttimenetelmää ja sakkofunktioita.

Edellä on käsitelty vain yhtä päätösmuuttujaa ja yhtä tilamuuttujaa. Tilanne on kuitenkin usean päätös- ja tilamuuttujan tapauksessa täysin samanlainen. Osatehtävien optimoinnit muodostuvat vain teknillisesti vaikeammiksi. Jos edellä kukin h_i ja x_i tulkittaisiin useiden tila- ja päätösmuuttujien vektoreiksi, siinä esitetty formalismi kuvaisi sellaisenaan usean tila- ja päätösmuuttujan dynaamisen optimoinnin tehtävää.

Ratkaisumentelmällä saatiin kussakin vaiheessa vaiheen optimaalinen päätösmuuttuja sekä optimikustannus siitä vaiheesta tehtävän loppuun. Siis optimaalinen jatko tarkasteluhetkestä loppuun tiedettiin, vaikka tehtävän alkuosasta ei ollut vielä mitään tietoa. Tätä juuri käytettiin hyväksi kunkin päätösmuuttujan optimiarvoa määrättäessä: Paras x_i oli se, joka maksimoi

jakson oman kustannuksen ja loppupään optimikustannuksen summan. Kyseistä periaatetta kutsutaan dynaamisen optimoinnin kehittäjän Richard Bellmanin mukaan Bellmanin optimiperiaatteeksi, ja siihen sisältyy dynaamisen optimoinnin keskeinen idea. Jos päätösmuuttuja olisi jatkuva ajan funktio $x(t)$ (eikä diskretoitu x_i , kuten esimerkissämme), Bellmanin periaatteen avulla saataisiin johdettua ensimmäisen kertaluvun osittais-differentiaaliyhtälö optimikustannukselle, n.k. Bellmanin yhtälö, ja sen ratkaisusta saataisiin optimaalinen päätösmuuttuja ajan funktiona, $x^*(t)$. Käytännön tehtävissä Bellmanin yhtälö joudutaan ratkaisemaan numeerisin keinoin. Tällöin ensimmäinen tehtävä on ajan diskretointi, jolloin jatkuvan ajan päätösmuuttuja $x(t)$ korvautuu diskreetillä päätösmuuttujalla x_i , ja tilanne palautuu aiemmin esitettyyn diskreettiin formalismiin.

Kun diskretoidaan useita muuttujia samanaikaisesti, joudutaan käyttämään paljon muistitilaa. Jos muuttujia on esim. neljä ja jos jokaisen arvoalue jaetaan sataan osaan, joudutaan tallettamaan $100^4 = 100\,000\,000$ eri arvoa. Tämä on luonnollisesti aivan liikaa. Eri menetelmillä voidaan useista muuttujista johtuvia vaikeuksia kyllä oleellisesti vähentää, mutta silti tämä suuren muistitilan tarve on dynaamisen optimoinnin vakavin rajoitus. Bellman itse puhui "dimensionaalisuuden kirouksesta".

Käsitellään vielä varsin konkreettinen esimerkki moniasteisesta päätöksen-tekoprosessista ja sen käsittelystä dynaamisella optimoinnilla. On suunniteltava monikäyttöaltaan kuukaisittainen juoksutusohjelma vuoden ajalle. Vettä on juoksutettava viljelmille, yhdyskunnalle ja voimalaitokseen. Kaikki juoksutus on täysin säädeltävissä. Altaaseen tulee vettä kahdesta joesta sekä sateena. Juoksutusohjelmassa on otettava huomioon paitsi kastelun, yhdyskunnan ja voimalaitoksen veden tarve myös altaan pinnan korkeuden vaikutukset ranta-asutukselle, virkistyskäytölle ja kalastukselle sekä mahdolliset tulvat alajuoksulla. Merkitään päätösmuuttujia vektorilla $\bar{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$, missä $i = 1, 2, \dots, 12$ tarkoittaa kuukautta, x_{i1} juoksutusta viljelmille, x_{i2} yhdyskunnalle ja x_{i3} voimalaitokseen kuukaudessa i . Stokastiset tekijät $\bar{V}'_i = (V'_{i1}, V'_{i2}, S'_i)$, missä V'_{i1} on ensimmäisen ja V'_{i2} toisen joen kuukaudessa i tuoma vesimäärä sekä S'_i altaaseen suoraan tulevan sadannan ja haihdunnan erotus kuukauden i aikana korvaamme aikaisempien vuosien mittauksista saaduilla keskiarvoilla $\bar{V}_i = (V_{i1}, V_{i2}, S_i)$, $i = 1, 2, \dots, 12$. Tilamuuttujia on yksi, h_i , altaan pinnan korkeus

i :nnen kuukauden lopussa. Kohdefunktio on summa kunkin kuukauden omasta kohdefunktiosta:

$$F = \sum_{i=1}^{12} F_i(\bar{x}_{i-1}, h_i).$$

Tilaa rajoittavat alin

sallittu altaan pinnan korkeus h'' sekä ylin sallittu arvo h' , ja ohjauksia rajoittavat juoksutuksen x_{i1} rajat 0 ja x'_{i1} , juoksutuksen x_{i2} rajat 0 ja x'_{i2} sekä voimalaitoksen juoksutuksen rajat 0 ja x'_{i3} . Alarajat on tässä merkitty nolliksi. Esim. juoksutus yhdyskuntaan ei tietenkään voi olla nolla, mutta tämä ehto oletetaan otetuksi huomioon kohdefunktiossa F . Yhtä hyvin alarajoiksi olisi voitu valita sopivat positiiviset vakiot x''_{i1} , x''_{i2} ja x''_{i3} . Altaan pinta-ala on A ja pinnan korkeus ensimmäisen kuukauden alussa h_0 . Altaan kuukaisittaisen juoksutusohjelman optimointi voidaan nyt lausua dynaamisen optimoinnin tehtävänä:

$$\begin{aligned} \text{maksimoitava} \quad F &= \sum_{i=1}^{12} F_i(\bar{x}_{i-1}, h_i) \\ \text{rajoituksin} \quad &\begin{cases} \bar{x}_{i-1} \in [0, x'_{i1}] \times [0, x'_{i2}] \times [0, x'_{i3}] \\ h_i \in [h''_i, h'_i] \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, 12, \end{aligned}$$

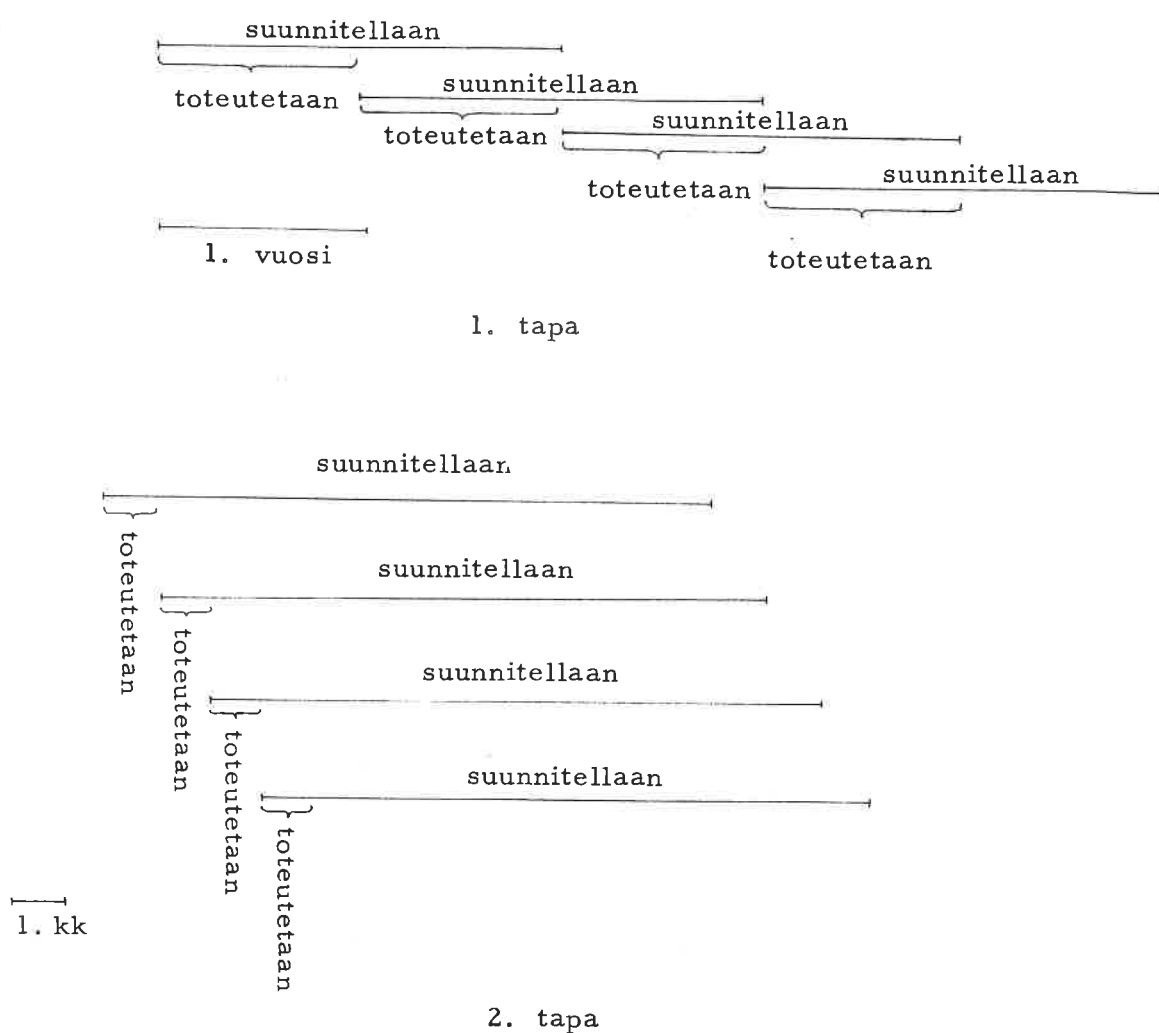
kun h_0 tunnetaan ja

$$h_{i+1} = h_i + \frac{1}{A} (V_{i1} + V_{i2} + S_i - x_{i1} - x_{i2} - x_{i3}), \quad i = 0, 1, \dots, 11.$$

Tehtävä voidaan sitten ratkaista edellä esitettyä algoritmia käyttäen.

Esimerkissä suunnitteluvälinä oli yksi vuosi. Ei ole tietenkään realistista suorittaa optimointia yhdelle kiinteälle jaksolle ja sen jälkeen toteuttaa sitä loppuun saakka välittämättä tilanteesta suunnittelujakson jälkeen. Käytännössä voidaan menetellä esimerkiksi siten, että suunnittelujaksoksi otetaan kaksi vuotta, mutta ohjelmaa toteutetaan vain vuoden ajan. Sen jälkeen suoritetaan uusi optimointi seuraavalle kahdelle vuodelle, toteutetaan saatua ohjelmaa taas ensimmäinen vuosi j.n.e. Myös voidaan ottaa suunnittelujaksoksi yksi vuosi, mutta toteuttaa ohjelmaa vain ensimmä-

mäinen kuukausi, siirtää sitten tätä vuoden pituista suunnittelujakso kuukaudella eteenpäin ja suorittaa uusi optimointi. Kuva 7.3 esittää näitä kahta vaihtoehtoa.



Kuva 7.3. Suunnittelu- ja toteutusjaksojen siirtyminen ajan mukana

Jälkimmäinen vaihtoehto sisältää paljon laskutyötä, sillä uusi optimointi on suoritettava joka kuukausi. Siinä voidaan kuitenkin edellistä vaihtoehtoa nopeammin ottaa huomioon muutokset suunnittelun lähtötiedoissa; uudet tekijät voidaan ottaa huomioon joka kuukausi. Tämä on hyödyllistä varsinkin jokien ja sateen seuraavana kuukautena tuomaa vesimäärää arvioitaessa.

8. Stokastiset tekijät

Vesivarojen suunnittelutehtävissä joudutaan käsittelemään suureita, joiden tarkka arvo ei suunnitteluhetkellä tiedossa. Tällaisia ovat mm. hydrologiset suureet sadanta, valunta ja haihdunta jonakin tulevana ajankohtana. Matemaattisissa malleissa näitä satunnaisia tekijöitä kuvataan satunnaisuureilla.

Satunnaissuureen ominaisuuksia kuvaa hyvin sen jakautumafunktio. Jos X on jokin satunnaissuure, esim. sadanta tulevan kuukauden aikana, niin sen jakautumafunktion F_X arvo pisteessä t (esim. 10 mm) on todennäköisyys sille, että sadanta on välillä $[-\infty, t]$,

eli

$$F_X(t) = P \{ X \leq t \} .$$

Jakautuman derivaattaa kutsutaan satunnaissuureen tiheysfunktioksi, ja sen arvo pisteessä t kerrottuna dt :llä on ensimmäisenä approksimaationa todennäköisyys sille, että sadanta on välillä $[t, t + dt]$. Siis

$$\frac{d}{dt} F_X(t) dt = f_X(t) dt = P \{ t \leq X \leq t + dt \} .$$

Koska todennäköisyys sille, että sadanta on pienempi kuin ääretön, on yksi, on

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_X(t) = 1.$$

Samankaltaisella päättelyllä todetaan, että

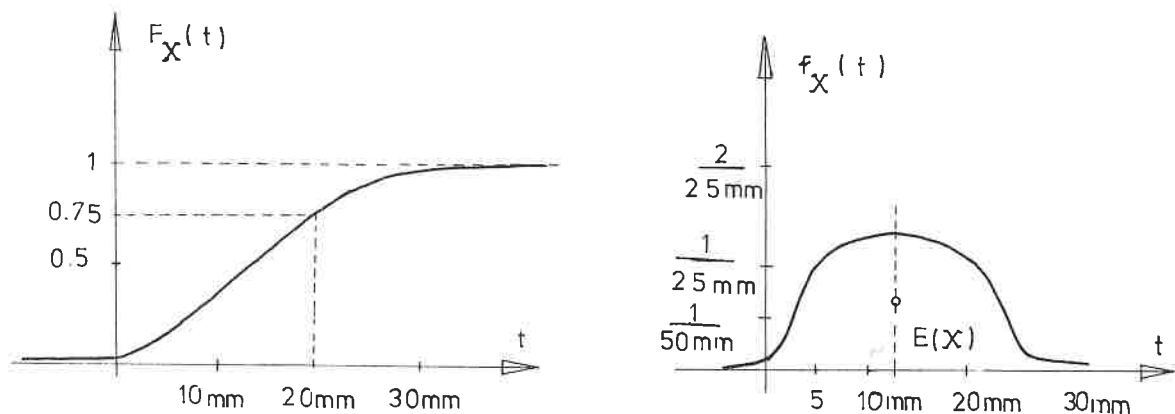
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0 .$$

Tiheysfunktio puolestaan on jakautuman derivaatta, joten voidaan päätellä,

että

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(t) = 1.$$

Siis tiheysfunktion ja vaaka-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala on yksi. Vielä on syytä huomata, että $F_X(t)$ on kasvava funktio. Tämän näkee siitä, että $f_X(t)$ ei tulkintansa mukaan voi olla negatiivinen. Kuva 8.1 esittää erästä mahdollista sadannan jakautumaa sekä sen tiheysfunktioita. Koska sadanta ei voi olla negatiivinen, on $F_X(t)$ $f_X(t)$ negatiivisilla arvoilla nolla.



Kuva 8.1. Esimerkki jakautuma- ja tiheysfunktioista

Jakautuma alkaa nolasta ja lähestyy suurilla t :n arvoilla ykköstä. Kuvan mukaan todennäköisyys sille, että sademäärä on pienempi tai yhtä suuri kuin 20 mm, on noin 0,75. Tiheysfunktion alleen sulkema pinta-ala on 1.

Satunnaissuureen X keskiarvo (odotusarvo) voidaan laskea sen tiheysfunktioista seuraavasti:

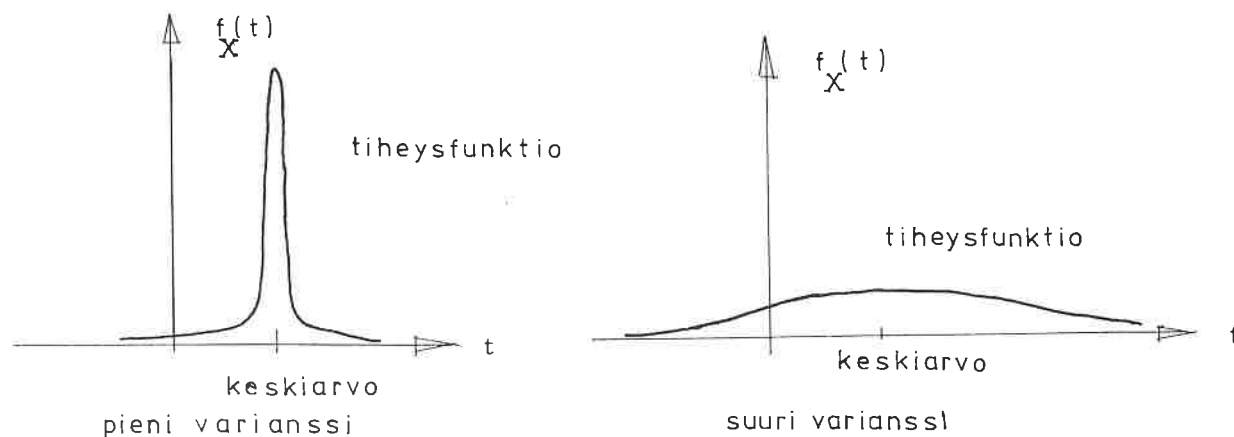
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt.$$

Tiheysfunktion ja t -akselin rajoittaman alueen painopisteen t -koordinaatti on juuri satunnaissuureen odotusarvo.

Satunnaissuureen X varianssi on

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [t - E(X)]^2 f_X(t) dt.$$

Se mittaa satunnaissuureen arvojen hajoamista keskiarvonsa ympärillä. Satunnaissuureella, jonka tiheysfunktio on keskittynyt odotusarvonsa ympärille, on pieni varianssi, kun taas laajalle odotusarvonsa ympärille levinneeseen tiheysfunktioon liittyvä varianssi on suuri, kuva 8.2.



Kuva 8.2. Keskiarvo ja varianssi

Tiheysfunktion ja t -akselin rajoittaman alueen hitausmomentti keskiarvon kautta kulkevan pystysuoran akselin suhteen on juuri satunnaissuureen varianssi. Varianssin neliöjuurta kutsutaan standardipoikkeamaksi.

Useiden käytännössä esiin tulevien satunnaissuureiden jakautumia voidaan approksimoida normaalijakautumalla:

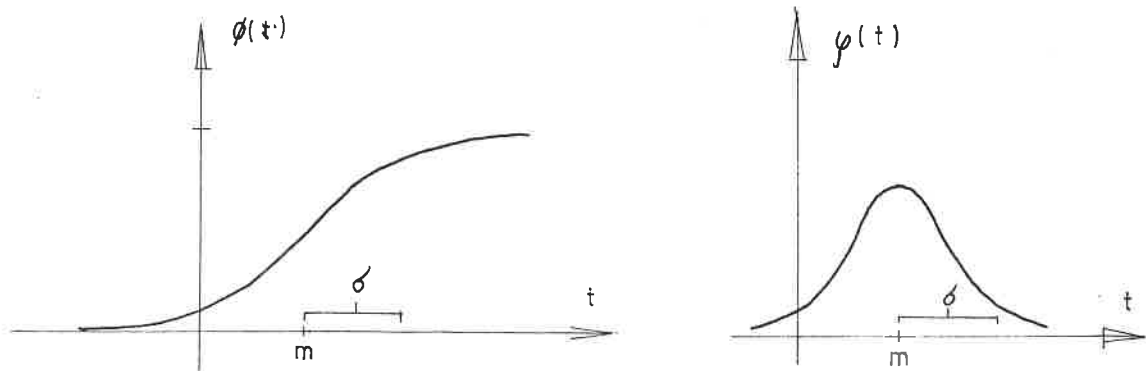
$$(8.1) \quad \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}} du.$$

Tämä johtuu eräästä todennäköisyyslaskennan raja-arvolauseesta, n.k. keskeisestä raja-arvolauseesta: Jos satunnaissuure on useiden suunnilleen yhtä suurten toisistaan riippumattomien satunnaissuureiden summa, on sen jakautuma lähellä normaalijakautumaa. Kaavan (8.1) normaalijakautumaan liittyvä keskiarvo on m ja varianssi σ^2 . Normaalijakautumat muodostavat kaksiparametrin joukon. Normaalisti jakautuneen satunnaissuureen

tiheysfunktio saadaan (8.1):stä derivoimalla:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Kuva 8.3 esittää normaalijakautumaa ja vastaavaa tiheysfunktiota.



Kuva 8.3. Normaalijakautuma ja sen tiheysfunktio

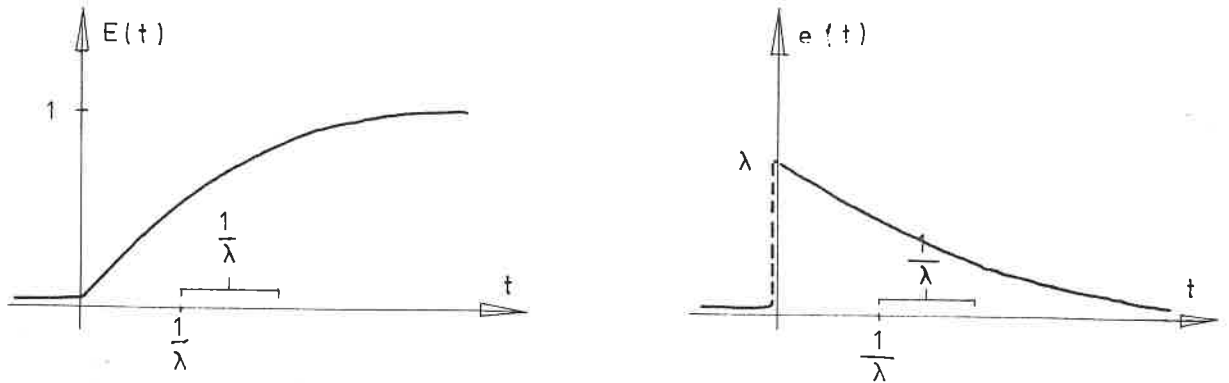
Toinen usein esille tuleva jakautuma on eksponenttijakautuma:

$$(8.2) \quad E(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{kun } t \geq 0 \\ 0 & \text{kun } t < 0 \end{cases}$$

Esimerkiksi sadepäivän sadantaa voidaan pitää eksponentiaalisesti jakautuneena satunnaissuureena. Eksponenttijakautuman tiheysfunktio saadaan taas (8.2):sta derivoimalla:

$$e(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{kun } t \geq 0 \\ 0 & \text{kun } t < 0 \end{cases}$$

Jakautumaan liittyvä keskiarvo on $\frac{1}{\lambda}$ ja varianssi $\frac{1}{\lambda^2}$. Eksponenttijakautumat muodostavat yksiparametrisen joukon. Kuva 8.4 esittää eksponentiaalisesti jakautuneen satunnaissuureen jakautumaa sekä sen tiheysfunktiota.

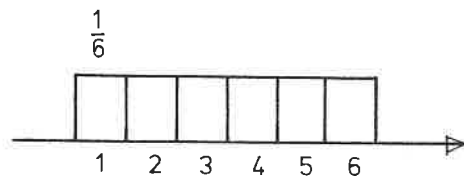


Kuva 8.4. Eksponenttijakautuma ja sen tiheysfunktio

Jotkin satunnaissuureet voivat saada vain äärellisen määrän arvoja. Esim. nopanheiton tulosta kuvaava satunnaissuure voi saada vain arvot 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Erotuksena edellä käsitellyille jatkuvasti jakautuneille satunnaissuureille tällaisia satunnaissuureita kutsutaan diskreetisti jakautuneiksi. Näissä tapauksissa jakautuma- ja tiheysfunktio on parempi korvata diskreetillä tiheysfunktioilla. Diskreetti tiheysfunktio kertoo, millä todennäköisyydellä satunnaissuure kunkin arvonsa saa. Nopanheiton diskreetti tiheysfunktio voidaan esittää seuraavasti:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Toinen tapa on piirtää todennäköisyyksistä pylväsdiagrammi, kuva 8.5.



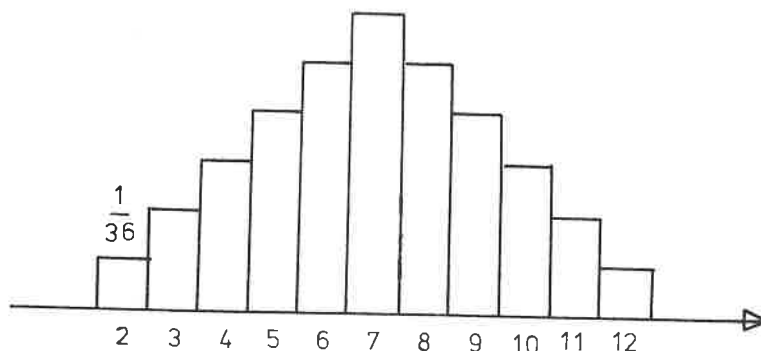
Kuva 8.5. Diskreetin tiheysfunktion pylväsdiagrammi

Kullekin satunnaissuureen mahdolliselle arvolle on oma pylväänsä, ja pylvään korkeus on vastaavan arvon todennäköisyys.

Heiteltäessä kahta noppaa mahdolliset tulokset ja niiden todennäköisyydet ovat, kuten on helppo havaita:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Jakautuman pylväsdiagrammia esittää kuva 8.6.



Kuva 8.6. Kahden nopan heittoon liittyvä pylväsdiagrammi

Jos diskreetin tiheysfunktion pylväiden leveydet merkitään ykköseksi, on pylväiden yhteinen pinta-ala yksi. Diskreetti tiheysfunktio on siis analo-
ginen jatkuvasti jakautuneen satunnaissuureen tiheysfunktion kanssa. Jos satunnaissuureen X diskreetti tiheysfunktio on

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

saadaan keskiarvoksi

$$E(X) = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n$$

ja varianssiksi

$$V(X) = p_1 (a_1 - E(X))^2 + p_2 (a_2 - E(X))^2 + \dots + p_n (a_n - E(X))^2,$$

aivan analogisesti jatkuvasti jakautuneen tapauksen kanssa.

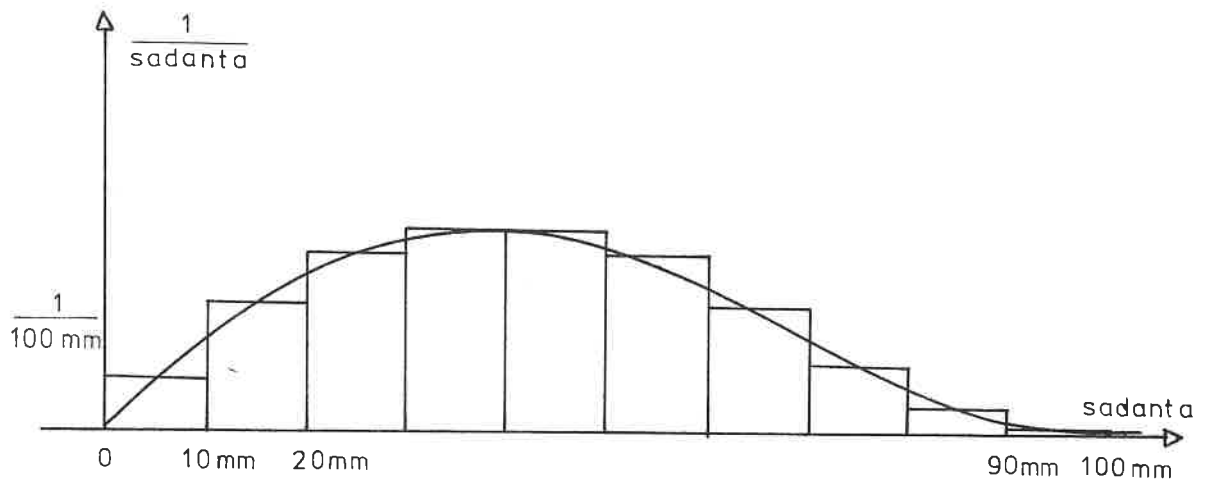
Numeerisessa käsittelyssä jatkuvasti jakautuneen satunnaissuureen arvojoukko joudutaan tavallisesti diskretoimaan, siis jakamaan sopivaan määrään välejä. Jos esim. sadannan mahdolliset arvot ovat välillä

$[0, 100 \text{ mm})$, nämä voidaan jakaa vaikkapa kymmeneen ryhmään:
 $[0, 10 \text{ mm})$, $[10 \text{ mm}, 20 \text{ mm})$, ..., $[90 \text{ mm}, 100 \text{ mm})$.

Diskretoinnin jälkeen ei satunnaissuureen tarkka arvo enää kiinnosta, ainoastaan se ryhmä mihin tarkka arvo kuuluu. Heti havaitaan, että diskretoinnissa jatkuvasti jakautunut satunnaissuure muuttuu diskreetisti jakautuneeksi. Diskreetin tiheysfunktion todennäköisyys välille $[a_{i-1}, a_i)$ saadaan integroimalla jatkuvasti jakautunut tiheysfunktio tämän välin ylitse:

$$p_i = \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t) dt.$$

Likimääräisesti nämä todennäköisyydet on helppo saada tiheysfunktion graafisesta esityksestä. Kuva 8.7 esittää sadannan mahdollisten arvojen $[0, 100 \text{ mm})$ diskretointia kymmenelle välille sekä välien todennäköisyyksien määräämistä.



Kuva 8.7. Sadannan tiheysfunktion diskretointi

Kunkin pylvään korkeus valitaan siten että pylvään pinta-ala on suunnilleen sama kuin tiheysfunktion vastaavalle välille osuneen pinta-alan osa. Välin todennäköisyys on pylvään pinta-ala. Kuvassa 8.7 ensimmäisen välin todennäköisyydeksi tulee noin $10 \text{ mm} \cdot \frac{1}{200 \text{ mm}} = 0,05$.

Diskretoidun satunnaissuureen keskiarvoa laskettaessa on kullekin välille osuvien arvojen yhteiseksi edustajaksi parasta valita välin keskipiste, siis päätepisteiden keskiarvo. Jos kuvan 8.7 esimerkissä välien todennäköi-

syydet ovat $p_1, p_2, \dots, p_{10}$ saadaan keskiarvoksi

92

$$E(X) = p_1 \frac{0 + 10 \text{ mm}}{2} + p_2 \frac{10 \text{ mm} + 20 \text{ mm}}{2} + \dots + p_{10} \frac{90 \text{ mm} + 100 \text{ mm}}{2}$$

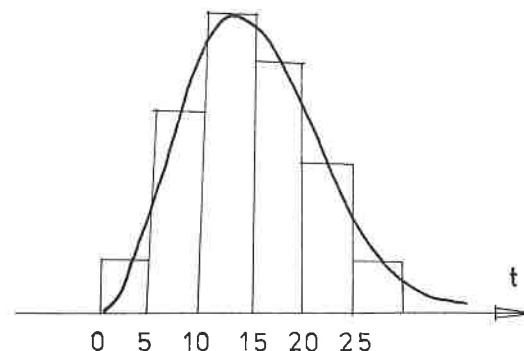
$$= p_1 \cdot 5 \text{ mm} + p_2 \cdot 15 \text{ mm} + \dots + p_{10} \cdot 95 \text{ mm}.$$

Satunnaissuureen tiheysfunktiolle saadaan approksimaatio satunnaissuureesta tehtyjen havaintojen avulla. Jos kysymyksessä on diskreetti satunnaissuure, joka saa arvot $a_1, a_2, \dots, a_n$, saadaan arvon a_i todennäköisyys jakamalla a_i :n esiintymislukumäärä havaintoaineistossa aineiston kokonaislukumäärällä. Arvon a_i todennäköisyyden approksimaatio on siis a_i :n suhteellinen osuus koko aineistossa. Jatkuvasti jakautunut satunnaissuure diskretoidaan ensin ja sen jälkeen menetellään edellä kuvatulla tavalla.

Seuraava esimerkki valaisee asiaa. Tietyn kuukauden sadannasta on tehty havaintoja kahdenkymmenen vuoden ajalta:

Vuosi	Sadanta	Vuosi	Sadanta	Vuosi	Sadanta	Vuosi	Sadanta
1	18 mm	6	21 mm	11	25 mm	16	23 mm
2	5 "	7	12 "	12	12 "	17	7 "
3	13 "	8	4 "	13	6 "	18	13 "
4	7 "	9	10 "	14	14 "	19	15 "
5	17 "	10	16 "	15	17 "	20	22 "

Jaetaan sademäärät esim. kuuteen ryhmään: 0 - 4 mm, 5 - 9 mm, 10 - 14 mm, 15 - 19 mm, 20 - 24 mm ja yli 24 mm, ja lasketaan kuhunkin ryhmään osuvien havaintojen lukumäärä: 1, 4, 6, 5, 3 ja 1 vastaavasti. Tilanteesta piirretään pylväsdiagrammi, kuva 8.8.



Kuva 8.8. Havaintoaineistosta piirretty pylväsdiagrammi ja tiheysfunktio

Pylväsdiagrammia mukaileva käyrä approksimoi sadantaa kuvaavan satunnaissuureen tiheysfunktioita. Pystyakselin mittakaava on kuitenkin valittava siten, että käyrän alle suljettua pinta-alaa on yksi. Jos satunnaissuureesta tarvitaan vain diskreetti tiheysfunktio, pylväsdiagrammi kelpaa tietysti sellaisenaan.

Useissa tapauksissa on perusteltua käyttää satunnaissuureen jakautumana jotakin tunnettua tyyppiä olevaa jakautumaa, esim. normaali- tai eksponenttijakautumaa. Tällöin riittää, kun havaintoaineistosta lasketaan jakautuman identifioimiseen tarvittavat parametrit; normaalijakautumalle keskiarvo ja keskihajonta, eksponenttijakautumalle vain keskiarvo.

Yksinkertaisin tapa käsitellä satunnaismuuttujia optimointitehtävissä on korvata ne keskiarvoillaan. Tällöin stokastiset tekijät tulevat korvatuiksi vakioilla, ja optimointitehtävä palautuu aiemmin käsiteltyyn deterministiseen tyyppiin. Seuraava esimerkki valaisee asiaa.

Järvestä halutaan juoksuttaa vettä kuukauden aikana voimalaitokselle määrä V_1 (m^3), pelloille kastelua varten määrä V_2 ja teollisuuslaitoksille määrä V_3 . Juoksutuspolitiikka on sovittava kuukauden alussa, jolloin kuukauden tulovirtaamaa V_t (m^3) on pidettävä satunnaissuureena. Aikaisemmilta vuosilta tehtyjen havaintojen mukaan kyseisessä kuukauden tulovirtaama on keskimäärin $\bar{V}_t$ m^3 . Juoksutuspolitiikan hyöty määräytyy paitsi juoksutuksesta V_1 , V_2 ja V_3 , myös järven pinnan korkeudesta h_1 kuukauden lopussa. Kohdefunktio on siis muotoa $f(V_1, V_2, V_3, h_1)$. Jos merkitään järven pinta-alaa A :lla ja pinnan korkeutta kuukauden alussa h_0 :lla, on

$$h_1 = h_0 + \frac{1}{A} (V_t - V_1 - V_2 - V_3).$$

Koska V_t on satunnaissuure, on sitä myös h_1 . Korvataan seuraavaksi V_t keskiarvolla $\bar{V}_t$, joka tunnetaan. Sijoittamalla $\bar{V}_t$ h_1 :n lausekkeeseen, joka on V_t :n suhteen lineaarinen, saadaan h_1 :n keskiarvo:

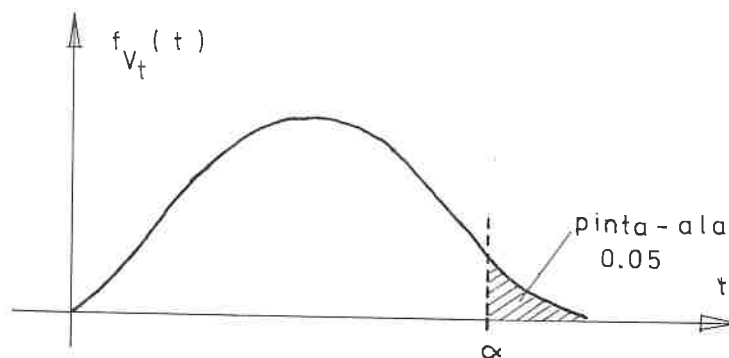
$$\bar{h}_1 = h_0 + \frac{1}{A} (\bar{V}_t - V_1 - V_2 - V_3),$$

Kun suoritetaan h_1 :n korvaus $\bar{h}_1$:lla myös kohdefunktiossa, on sekin vain juokсутusten V_1 , V_2 ja V_3 funktio. Alkujaan stokastinen optimointitehtävä, optimijuokсутusten määrääminen, on näin palautunut tavalliseen deterministiseen tehtävään:

etsittävä V_1 , V_2 ja V_3 siten, että $f(V_1, V_2, V_3, \bar{h}_1)$ saa maksimin rajoitusten $V_1 \geq 0$, $V_2 \geq 0$, $V_3 \geq 0$ ollessa voimassa.

Malli, jossa satunnaismuuttujat on korvattu keskiarvoillaan, on tietenkin karkea. On selvää, että tulovirtaama ei todellisuudessa noudata keskiarvoaan; se on sananmukaisesti satunnainen suure. Jos tulevaa tulovirtaamaa tai muuta satunnaissuuretta joudutaan tehtävässä kuitenkin käyttämään, on aikaisempiin havaintoihin perustuva keskiarvo usein paras ennuste.

Edellä satunnaissuure esiintyi kohdefunktiossa. Se voi esiintyä myös rajoitusyhtälöissä, ja tällöin keskiarvolla korvaaminen saattaa olla liian karkea menetelmä. Lisätään edelliseen esimerkkiin tulvan välttämiseksi rajoitus $h_1 = h_0 + \frac{1}{A}(V_t - V_1 - V_2 - V_3) \leq H$, ja korvataan h_1 ja V_t siinä $\bar{h}_1$:llä ja $\bar{V}_t$:llä. Jos optimipisteessä $\bar{h}_1$ on rajalla: $\bar{h}_1 = H$, tulee kaikissa niissä tapauksissa, joissa tulovirtaama V_t todellisuudessa sitten ylittää keskiarvonsa $\bar{V}_t$, myös rajoitus $h_1 \leq H$ rikotuksi. Tulvan riski on tällöin liian suuri. Tässä tilanteessa V_t on korvattava sellaisella vakiolla, että ylityksen $h_1 \leq H$ todennäköisyys tulee hyväksyttävän pieneksi. Menetellään seuraavasti: Aikaisempien vuosien havainnoista on tiedossa tulovirtaaman V_t tiheysfunktio (kuva 8.9).



Kuva 8.9. Tulovirtaaman tiheysfunktio

Valitaan riskitaso jolla optimointi halutaan suorittaa, esim. 95 %, etsitään sellainen arvo α , että tulovirtaama V_t ylittää sen todennäköisyydellä 0,05 ja muodostetaan rajoitusyhtälö ikäänkuin tulovirtaama olisi juuri α .

Koska

$$h_1 = h_0 + \frac{1}{A} (V_t - V_1 - V_2 - V_3),$$

asetetaan siis

$$h_0 + \frac{1}{A} (\alpha - V_1 - V_2 - V_3) \leq H.$$

Kohdefunktiossa V_t korvataan kuitenkin edelleen keskiarvolla.

Moniasteisissa päätöksentekoprosesseissa joudutaan tarkastelemaan satunnaissuureiden jonoja. Tällaisia ovat esim. perättäisten kuukausien tulovirtaamat. Jonon suureiden sanotaan olevan toisistaan riippumattomia, jos edellisen satunnaissuureen tunteminen ei anna mitään tietoa seuraavasta satunnaissuureesta. Tällöin esimerkiksi seuraavan satunnaissuureen keskiarvon ennustamisessa ei merkitse mitään, tunnetaanko edellisen satunnaissuureen arvo vai ei. Perättäiset nopan heitot muodostavat tällaisen jonon. Jonoa toisistaan riippumattomia satunnaissuureita kutsutaan riippumattomaksi prosessiksi.

Helpoin tapa käsitellä esim. perättäisiä jaksoja moniasteisessa päätöksentekoprosessissa on kuvata niitä riippumattomalla prosessilla, ja korvata jonon satunnaissuureet keskiarvoillaan. Koska satunnaissuureet ovat riippumattomia, kaikkien jaksojen keskiarvot voidaan määrätä jo suunnittelujakson alussa, eikä niitä tarvitse muuttaa sitä mukaa, kun jaksojen todelliset tulovirtaamat saadaan selville. Mallin yksinkertaisuudesta maksetaan se hinta, että malli on karkea ja kuvaa heikosti todellisuutta. Tarkempi ja työläämpi tapa tulovirtaamien jonon kuvaamiseksi on Markov-mallin käyttö.

Jos satunnaissuureiden jonossa kukin suure riippuu vain edellisen suureen arvosta, mutta ei muiden suureiden, jonoa sanotaan Markov-ketjuksi. Tällöin esimerkiksi satunnaissuureen keskiarvo riippuu siitä, minkä arvon

edellinen satunnaissuure sai. Sitä edelliset suureet eivät sen sijaan tähän keskiarvoon vaikuta.

Muodostetaan seuraavaksi perättäisistä tulovirtaaman arvoista Markov-malli.

Jaetaan tulovirtaaman mahdolliset arvot $0 - V_{\max}$ ryhmiin:

$[0, V_1), [V_1, V_2), [V_2, V_3), \dots, [V_{n-1}, V_n]$. Ryhminä on n kpl ja viimeinen arvo V_n on $V_{\max}$. Olkoon a_{ij} todennäköisyys sille, että seuraavan jakson tulovirtaama on välillä $[V_{j-1}, V_j)$ kun tiedetään, että edellisen jakson tulovirtaama oli välillä $[V_{i-1}, V_i)$. Luvut a_{ij} ovat siis ehdollisia todennäköisyyksiä, ja ne muodostavat n.k. Markov-matriisin:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Konstruktioista seuraa, että Markov-matriisin jokainen vaakarivi on diskreetti tiheysfunktio. Ensimmäinen vaakarivi on tulevan jakson tulovirtaaman diskreetti tiheysfunktio siinä tapauksessa, että edellisen jakson tulovirtaama osui välille $[0, V_1)$, ja muut vaakarivit tulkitaan vastaavasti. Näin siis jokaisen vaakarivin summa on yksi. Tämä nähdään myös seuraavasti: i :nnen vaakarivin summa on todennäköisyys sille, että seuraavalla jaksolla tulovirtaama osuu välille $[0, V_1)$ tai $[V_1, V_2)$ tai ... tai $[V_{n-1}, V_{\max})$, kun tiedetään, että edellisen jakson tulovirtaama oli välillä $[V_{i-1}, V_i)$. Tämä on yksi.

Tulevan jakson tulovirtaaman ehdollinen keskiarvo - ehdolla edellinen tulovirtaama välillä $[V_{i-1}, V_i)$ - saadaan helposti vastaavasta tiheysfunktioista, s.o. Markov-matriisin vaakarivistä. Keskiarvo on

$$a_{i1} \frac{0 + V_1}{2} + a_{i2} \frac{V_1 + V_2}{2} + \dots + a_{in} \frac{V_{n-1} + V_n}{2}.$$

Koska Markov-matriisin eri vaakarivit ovat yleisesti keskenään erilaiset, riippuu satunnaissuureen keskiarvo todellakin edellisen satunnaissuureen arvosta. Jos riippumatonta prosessia kuvattaisiin Markov-mallilla, olisivat Markov-matriisin kaikki vaakarivit keskenään identtiset:

$a_{1j} = a_{2j} = \dots = a_{nj}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Luku a_{ij} olisi tällöin todennäköisyys sille, että satunnaissuureen arvo olisi välillä $[V_{j-1}, V_j)$, olipa i (tai edellisen satunnaissuureen arvo) mikä tahansa.

Markov-mallin muodostamiseen tarvitaan Markov-matriisissa olevat n^2 ehdollista todennäköisyyttä. Näille saadaan approksimaatiot, jos jonosta on tehty tarpeeksi paljon havaintoja. Havainnot jaetaan ryhmiin: jos edellinen tulovirtaama on välillä $[V_{i-1}, V_i)$ ja jälkimmäinen välillä $[V_{j-1}, V_j)$, havainto tulee ryhmään (i, j) . Kunkin ryhmän havaintojen lukumäärä jaetaan sitten vastaavan vaakarivin havaintojen kokonaismäärällä, ja tuloksena on luvun a_{ij} approksimaatio. Menettelytavasta nähdään suoraan, että näin saadun Markov-matriisin jokaisen vaakarivin summa on yksi.

Edellä on yksinkertaisuuden vuoksi kuvattu n.k. homogeenista Markov-mallia: Markov-matriisin ehdolliset todennäköisyydet ovat peräkkäisille satunnaissuurepareille samat. Käytännössä tilanne ei tietenkään ole tällainen. Esimerkiksi syyskuun virtaamiin liittyvät todennäköisyydet ovat aivan toiset kuin toukokuun. Kuukausittaisten virtaamien Markov-malliin tarvitaankin oma Markov-matriisi kullekin perättäisten kuukausien muodostamalle parille, 12 kpl. Markov-matriisien muodostaminen tehdyistä havainnoista on aivan analoginen edellä esitetyn menettelyn kanssa, eikä useiden Markov-matriisien käyttö tuo muuhunkaan käsittelyyn mitään periaattellisesti uutta. Jos suunnittelujakson pituus on esim. neljännesvuosi, Markov-matriiseja tarvitaan neljä: yksi kunkin perättäisen vuosineljänneksen muodostamalle parille. Peräkkäiset vuodet oletetaan joka tapauksessa keskenään identtisiksi.

Kahdentoista Markov-matriisin muodostamiseen tarvitaan $12n^2$ parametria, ja näiden määrittämiseen vaaditaan suuri joukko havaintoja. Jos havaintoja on liian vähän, Markov-matriisien elementtien approksimaatiot jäävät hyvin ylimalkaisiksi, ja Markov-mallilla saavutettava tarkkuus hukkuu täysin

näihin virhelähteisiin. Tällöin Markov-mallin vaatima työ menee hukkaan, ja on parempi käyttää riippumatonta mallia. Riippumattomassa mallissa tarvitaan samalla virtaaman arvojen ryhmittelyllä vain $12n$ parametria.

Jos muodostetun Markov-matriisin vaakarivit ovat keskenään kovin samantyyppiset, on se merkki siitä että kysymyksessä olevat satunnaissuureet ovat lähes riippumattomia. Tällöin Markov-mallin käyttämisellä ei voiteta mitään; samoihin tuloksiin päästäisiin riippumatonta mallia käyttämällä. Tällöin riippumaton malli on luonnollisesti viisaampi valinta.

Tarkastelemme lopuksi esimerkkiä moniasteisesta päätöksentekoprosessista sekä riippumattoman mallin että Markov-mallin valossa.

Monikäyttöaltaalle on suunniteltava optimaalinen kuukausittainen juoksutusohjelma vuoden ajalle. Altaaseen virtaa vettä kuukaudessa i satunnainen määrä V_i , ja siitä juoksutetaan samassa kuussa määrä x_i . Altaan pinnan korkeus kuukauden i lopussa on h_i , ja sitä rajoittaa ehto $h_i \in [h_i'', h_i']$. Kuukauden i juoksutusta rajoittaa ehto $x_i \in [x_i'', x_i']$. Koko vuotta vastaava kohdefunktio on $F = \sum_{i=1}^{12} F_i(x_{i-1}, h_i)$, altaan pinta-ala on A ja

altaan pinnan korkeus ensimmäisen kuukauden alussa h_0 . Ongelmaa voidaan kuvata seuraavalla stokastisen dynaamisen optimoinnin tehtävällä:

$$\begin{aligned} \text{maksimoitava } F &= \sum_{i=1}^{12} F_i(x_{i-1}, h_i) \\ \text{rajoituksin } \begin{cases} x_{i-1} \in [x_{i-1}'', x_{i-1}'] \\ h_i \in [h_i'', h_i'] \end{cases} & \quad i = 1, 2, \dots, 12 \end{aligned}$$

kun h_0 tunnetaan, $h_{i+1} = h_i + \frac{1}{A} (V_i - x_i)$, $i = 0, 1, \dots, 11$,

ja V_i , $i = 0, 1, \dots, 11$ on jono satunnaissuureita.

Jos valitaan riippumaton malli, kaikki satunnaissuureet V_i korvataan jo suunnittelujakson alussa niille havainnoista saaduilla keskiarvoilla. Tällöin tehtävä palautuu deterministiseksi tehtäväksi, joka ratkaistaan täysin luvun 7 menetelmien mukaan. Saatua optimaalista juoksutusohjelmaa toteutetaan sitten läpi koko toteutusjakson, eikä toteutettaessa oteta lainkaan huomioon niitä virtaaman todellisia arvoja, jotka jaksojen kuluessa voitaisiin mitata.

Markov-mallin tapauksessa virtaamien V_i yhteinen vaihteluväli $[0, V_{\max})$ jaetaan jälleen sopivaan määrään ryhmiä, ja muodostetaan aikaisemmilta vuosilta saatujen havaintojen avulla kaikki 12 Markov-matriisia. Dynaamisen optimoinnin osatehtävien maksimointi suoritetaan paitsi kuukauden alussa olevan altaan pinnan korkeuden myös edellisen kuukauden virtaaman arvon funktiona. Jos altaan pinnan korkeuden vaihteluväli on jaettu m :ään ja virtaamien yhteinen vaihteluväli n :ään osaan, joudutaan jokainen osatehtävä optimoimaan kaikilla parin (i, j) , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, arvoilla. Kun käsiteltävänä on k :s jakso ja pari (i, j) eli vaihteluvälit $[h_{i-1}, h_i]$ ja $[V_{j-1}, V_j]$, altaan pinnan korkeudelle jakson alussa sijoitetaan arvo $\frac{h_{i-1} + h_i}{2}$, ja satunnaissuure V_k korvataan k :nnen Markov-matriisin j :nnen vaakarivin määräämällä ehdollisella keskiarvolla. Optimointitehtävä on siis seuraava:

$$\text{maksimoitava } F_k(x_{k-1}, f_k(x_{k-1}, \frac{h_{i-1} + h_i}{2})) + F_{k+1}^*(f_k(x_{k-1}, \frac{h_{i-1} + h_i}{2}))$$

$$\text{rajoituksin } f_k(x_{k-1}, \frac{h_{i-1} + h_i}{2}) \in [h_k'', h_k'] , x_{k-1} \in [x_{k-1}'', x_{k-1}'] ,$$

$$\text{missä } f_k(x_{k-1}, \frac{h_{i-1} + h_i}{2}) = \frac{h_{i-1} + h_{i+1}}{2} + \frac{1}{A} (\bar{V}_{k-1}^j - x_{k-1})$$

ja missä puolestaan

$$\bar{V}_{k-1}^j = (k-1) a_{j1} \frac{V_0 + V_1}{2} + (k-1) a_{j2} \frac{V_1 + V_2}{2} + \dots + (k-1) a_{jn} \frac{V_{n-1} + V_n}{2}.$$

$\bar{V}_{k-1}^j$ on siis virtaaman V_{k-1} ehdollinen keskiarvo, kun tiedetään, että edellisen kuukauden virtaaman V_{k-2} :n arvo oli välillä $[V_{j-1}, V_j)$. Luku $(k-1)^{a_{j1}}$ on $k-1$:sen Markov-matriisin j :nnen vaakarivin ensimmäinen elementti, $(k-1)^{a_{j2}}$ sen toinen elementti j.n.e. Edellä olevaan termiin

$\frac{h_{i-1} + h_i}{2}$ olisi kaikkialla pitänyt liittää indeksi $k-1$, koska termi kuuluu $k-1$:seen toimintajaksoon. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi indeksi on kuitenkin jätetty kirjoittamatta.

Optimoinnin tuloksena saadaan sitten toimintaojeet jokaiselle kuukaudelle, jokaiselle kuukauden alussa olevalle altaan pinnan korkeuden arvolle ja jokaiselle edellisen kuukauden virtaaman V arvolle. Juoksutuspäätöstä kunkin jakson alussa tehtäessä luetaan sen hetkinen altaan pinnan korkeus ja edellisen kuukauden virtaama ja valitaan näiden perusteella oikea toimintaohje.

Dynaamisen optimoinnin pahin pullonkaula on sen vaatima suuri muistitilan tarve. Edellä esitetystä on käynyt selville, että Markov-mallin käyttö kasvattaa muistitilan tarvetta entisestäänkin. Samoin on jo havaittu Markov-mallin vaatima suuri laskentatyö. Näin ollen Markov-mallia ei kannata käyttää, ellei sillä saavutettu tarkkuus ole mallin vaatiman vaivan arvoinen.

9. Simulointimenetelmät

Usein vesivarojen suunnittelutehtävä on niin laaja, että kaikista edellä esitetyistä menetelmistä huolimatta optimia ei pystytä löytämään. Tehtävän laajuus saattaa yksinkertaisesti ylittää käytettävissä olevan laskentakapasiteetin niin selvästi, että optimin hakuun ei kannata edes ryhtyä. Kukaan ei varmasti kuvittele, että kokonaisvaltainen Suomen 60 000 järveä kattava säännöstelymalli olisi optimoitavissa (tai edes muodostettavissa).

Jos tutkittavasta systeemistä on kuitenkin saatu aikaan matemaattinen malli ja kohdefunktio, voidaan aina vertailla eri päätösten vaikutuksia ja valita kokeilluista vaihtoehdoista paras. Voidaan sijoittaa valitut päätösmuuttujien arvot malliin, laskea tilamuuttujat mallin avulla ja määrätä kohdefunktion arvon päätökselle. Menettelyä kutsutaan simuloinniksi.

Simulointi tarkoittaa jäljittelyä. Matemaattinen malli simuloi eli jäljittelee todellisen systeemin käyttäytymistä. Tätä käyttäytymistä voidaan jäljitellä myös erilaisien fysikaalisten mallien avulla. Matemaattisen mallin käsittely tapahtuu digitaalisilla tietokoneilla, ja siksi edellistä simulointitapaa kutsutaan digitaalseksi simuloinniksi erotukseksi jälkimmäisestä, analogisesta simuloinnista. Käsitellään ensin digitaalista simulointia.

Tarkastellaan vielä kahden edellisen luvun esimerkkiä altaan optimaaliseen juoksutusohjelmaan liittyvästä moniasteisesta päätöksentekoprosessista:

$$\text{maksimoitava } F = \sum_{i=1}^{12} F_i(x_{i-1}, h_i)$$

$$\text{rajoituksin } x_{i-1} \in [x_{i-1}^{\prime\prime}, x_{i-1}^{\prime}] \quad i = 1, 2, \dots, 12$$

$$h_i \in [h_i^{\prime\prime}, h_i^{\prime}]$$

$$\text{kun } h_0 \text{ tunnetaan ja } h_{i+1} = h_i + \frac{1}{A} (V_i - x_i), \quad i = 0, 1, \dots, 11.$$

Tässä h_i on altaan pinnan korkeus jakson i lopussa, x_i on jakson i juoksutus,

V_i jakson i tulovirtaama, $F_i(x_{i-1}, h_i)$ jakson i kohdefunktio ja A altaan pinta-ala. Tulovirtaamia on kuvattu riippumattomalla prosessilla ja ne on mallissa jo korvattu havainnoista saaduilla keskiarvoilla.

Digitaalista simulointia käytettäessä valitaan jotkut järkevät h_0 ja x_0 ja lähdetään etenemään aivan mallin mukaan (tällä kertaa tehtävän alusta): Lasketaan $h_1 = h_0 + \frac{1}{A}(V_0 - x_0)$, valitaan tämän h_1 :n nojalla jokin sopiva x_1 , lasketaan h_2 , valitaan sopivalta tuntuva x_2 jne., ja lopuksi lasketaan kyseisiin valintoihin liittyvä kohdefunktion arvo. Näin menetellään sitten useilla päätösmuuttujien $x_0, x_1, \dots, x_{11}$ arvoilla.

Tällaisella simuloinnilla ei tietenkään voida löytää optimaalista ohjausta. Siinäkin harvinaisessa tapauksessa, että kaikki jonkin hyvän valinnan läheiset valinnat antaisivat edellistä huonompia kohdefunktion arvoja, voi optimikandidaatti olla yhtä hyvin lokaalinen kuin globaalinen ääriarvo. Tästä huolimatta simuloinnilla voidaan saavuttaa monia etuja.

Kolmannessa luvussa jo todettiin, että suunnittelijan on hyödyllistä saada mahdollisimman konkreettinen käsitys systeemin luonteesta ja sen käyttäytymisestä. Tällaisen realistisen kuvan hankkimiseen simulointi sopii erittäin hyvin. Suunnittelija voi tutkia mallin (ja sen avulla systeemin) ominaisuuksia valitsemalla päätösmuuttujille haluamiaan arvoja ja laske-malla sitten päätöksistä tilamuuttujille sekä kohdefunktioille tulevat arvot.

Simulointia voidaan käyttää mallin ja sen kuvaaman fysikaalisen systeemin vastaavuuden tutkimiseen. Aikaisemmin tehtyjä päätöksiä käytetään tällöin mallin päätösmuuttujina ja mallin antamia tuloksia verrataan todellisuudessa mitattuihin tuloksiin. Mallin parametrit voidaan sitten sovittaa siten, että systeemin ja mallin vastaavuus on mahdollisimman hyvä. Myös sellaisia tapauksia, joissa optimointi on onnistuttu suorittamaan, on hyödyllistä simuloida. Mallin parametrit eivät koskaan ole tarkkoja, joten löydettyä optimipäätöstä on hyödyllistä soveltaa malliin, jossa parametrien arvoja on hiukan muutettu. Tällöin nähdään rikkoutuvatko rajoitusyhtälöt ja kuinka paljon, jos parametrit poikkeavat jonkin verran alkuperäisistä. Herkkyys-

analyysiin simulointi sopii erittäin hyvin. Kun optimi on löydetty, voidaan muutetun mallin optimi etsiä simuloimalla, tarkastelemalla muutetun mallin käyttäytymistä lasketun optimin lähellä olevilla päätösmuuttujien arvoilla. Tällöin säästytään usean optimoinnin aiheuttamalta vaivalta ja saadaan samalla kokemusta käsillä olevasta systeemistä. Stokastisia malleja simuloitaessa ei ole tarpeen korvata satunnaismuuttujia heti niiden keskiarvoilla. Jos satunnaismuuttujien jakautumat tunnetaan, simulointimalliin voidaan ohjelmoida satunnaislukugeneraattorit, jotka antavat tällä tavalla jakautuneita satunnaislukuja stokastisten parametrien arvoiksi. Näin simulointimallit antavat huomattavasti konkreettisemmän kuvan todellisesta tilanteesta, kuin deterministiset optimointimallit. Markov-prosessien generointi sujuu myös simulointimallissa helposti, jos tarkasteltavaa satunnaisprosessia kuvaava Markov-matriisi tunnetaan. Jokaista Markov-matriisin vaakariviä vastaavalle diskreetille jakautumalle muodostetaan oma satunnaislukugeneraattorinsa, ja samalla kun jostakin jakautumasta generoitua satunnaislukua käytetään satunnaisilmiön, esim. sadannan, kuvaamiseen, määrätään sen avulla myös se jakautuma, josta otetaan seuraava satunnaisluku.

Jos suunnittelutehtävän alussa sopivista päätösmuuttujan arvoista ei ole minkäänlaista kuvaa, ne voidaan myös valita satunnaislukugeneraattorilla. Tällöin puhutaan Monte-Carlo simuloinnista. Monte-Carlo simuloinnin hyvä puoli on se, että se ei "juutu" samalla tavalla lokaaliseen ääriarvoon kuin monet muut edellisissä luvuissa esitetyt menetelmät. Se on kuitenkin varsin aikaa (etenkin tietokoneaikaa) vievä menetelmä. Kun päätösmuuttujien arvot valitaan satunnaisesti, useimmat valinnat antavat todellisuudelle niin vieraita arvoja, että vastaavat simulointiajot menevät täysin hukkaan. Kun suunnittelijalla alkaa olla jonkinlainen kuva tehtävästä, ei Monte-Carlo simulointia enää kannata käyttää.

Simuloinnin käyttö optimoinnissa on luonteeltaan selvästi hakuammuntaa. Sitä onkin usein luonnehdittu viimeiseksi keinoksi: "Jos muuta ei osata, niin sitten vasta kannattaa simuloida". Simuloinnin arvo suunnittelijan näkemyksen ja intuition lisänä on kuitenkin niin suuri, että sitä kannat-

taa ilman muuta käyttää, "vaikka muutakin osattaisiin"; sen muun ohella.

Tarkastellaan vielä analogista simulointia. Systeemin pienoismallin rakentaminen ja ominaisuuksien tutkiminen pienoismallin avulla on simulointia (jäljittelyä) sekin. Pienoismallin käyttö systeemiä kuvaamaan perustuu mallin ja systeemin väliseen fysikaaliseen analogiaan. Jos systeemistä on rakennettu matemaattinen malli, voidaan etsiä muita fysikaalisia systeemejä, jotka käyttäytyvät samojen yhtälöiden mukaan, ja tutkia näitä. Myös tämä menettely perustuu systeemien väliseen fysikaaliseen analogiaan, tosin heikompaan kuin mitä on todellisen systeemin ja sen pienoismallin välillä. Fysikaalisten mallien käyttöä systeemin kuvaamiseen kutsutaan analogiseksi simuloinniksi.

Vesistöreittien ja sähköisten piirien välinen analogia tarjoaa erittäin käyttökelpoisen perustan vesistöjen analogiseen simulointiin. Virtaama voidaan rinnastaa suoraan sähkövirtaan, allas kondensaattoriin, altaan pinnankorkeus kondensaattorin yläpään potentiaaliin ja altaan pinta-ala kondensaattorin kapasitanssiin. Altaan virtaama pinnankorkeuden funktiona määräytyy altaan purkautumiskäyrästä, ja sähkövirtaa kondensaattorista maan potentiaaliin voidaan säädellä vastuksella. Altaan virtaama ei tosin yleensä ole suoraan verrannollinen pinnan korkeuteen (mitattuna sopivasta referenssisitasosta), ts. purkautumiskäyrä ei ole suora, joten tämän vuoksi analogia vaatii sähköiseen piiriin jännitteestä riippuvia epälineaarisia vastuksia.

Kuvassa 9.1 on esitetty yksinkertainen allasmalli ja sille analoginen sähköinen piiri. Merenpinnan korkeutta vastaa maan potentiaali ja altaan pinnan korkeutta h kondensaattorin yläpään potentiaali U . Tulovirtaamaa Q_1 on kuvattu virtageneraattorin virralla i_1 ja virtaamaa altaasta mereen, Q_2 , virralla i_2 . Altaan purkautumiskäyrän mukaista mereen laskevan joen virtausvastusta vastaa sähköisen piirin jännitteestä U riippuva vastus R . Systeemien ajallista käyttäytymistä voidaan kuvata oheisilla yhtälöillä:

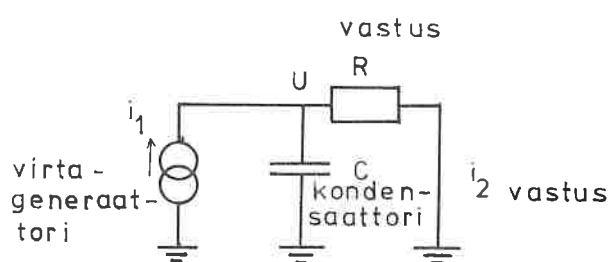
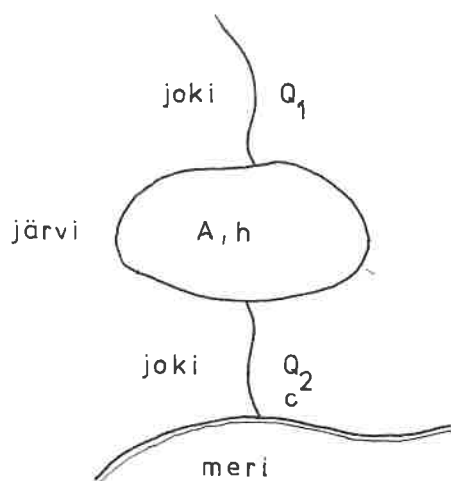
$$Q_2(t) = \frac{h(t)}{v(h(t))},$$

$$i_2(t) = \frac{U(t)}{R(U(t))},$$

$$\text{eli} \begin{cases} h(t) = h_0 + \frac{1}{A} \int_0^t (Q_1(t) - Q_2(t)) dt \\ \frac{d}{dt} h(t) = \frac{1}{A} (Q_1(t) - Q_2(t)), \end{cases} \quad \text{eli} \begin{cases} U(t) = U_0 + \frac{1}{C} \int_0^t (i_1(t) - i_2(t)) dt \\ \frac{d}{dt} U(t) = \frac{1}{C} (i_1(t) - i_2(t)), \end{cases}$$

joista yhdistämällä

$$\frac{d}{dt} h(t) + \frac{1}{AV(h(t))} = \frac{1}{A} Q_1(t) \quad \frac{d}{dt} U(t) + \frac{1}{CR(U(t))} U(t) = \frac{1}{C} i_1(t).$$



Kuva 9.1. Yksinkertainen allasmalli ja sen analoginen piiri

Yhtälöistä nähdään selvästi systeemien välinen täydellinen fysikaalinen analogia. Kvantitatiivinen vastaavuus saadaan aikaan valitsemalla sopiva muuntosuhde analogisten yksiköiden (jännite - korkeus, virtaama - sähkövirta, kapasiteetti - pinta-ala jne.) välille ja valitsemalla sähköisen piirin komponenttien arvot siten, että ne muuntosuhteella muutettuna vastaavat kuvattavan vesistösynteesin vastaavia arvoja.

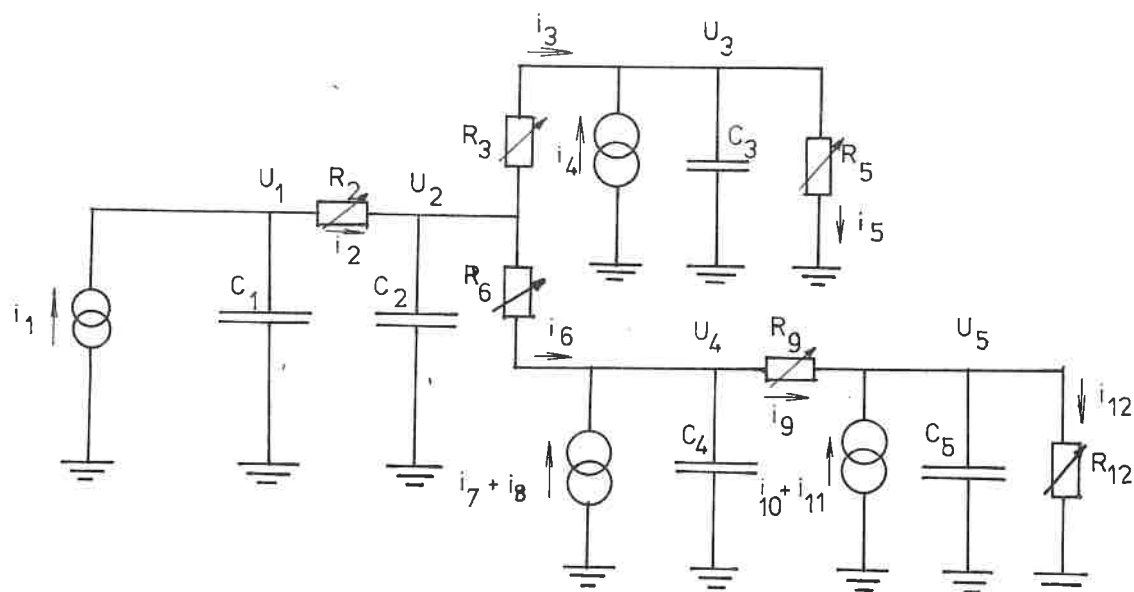
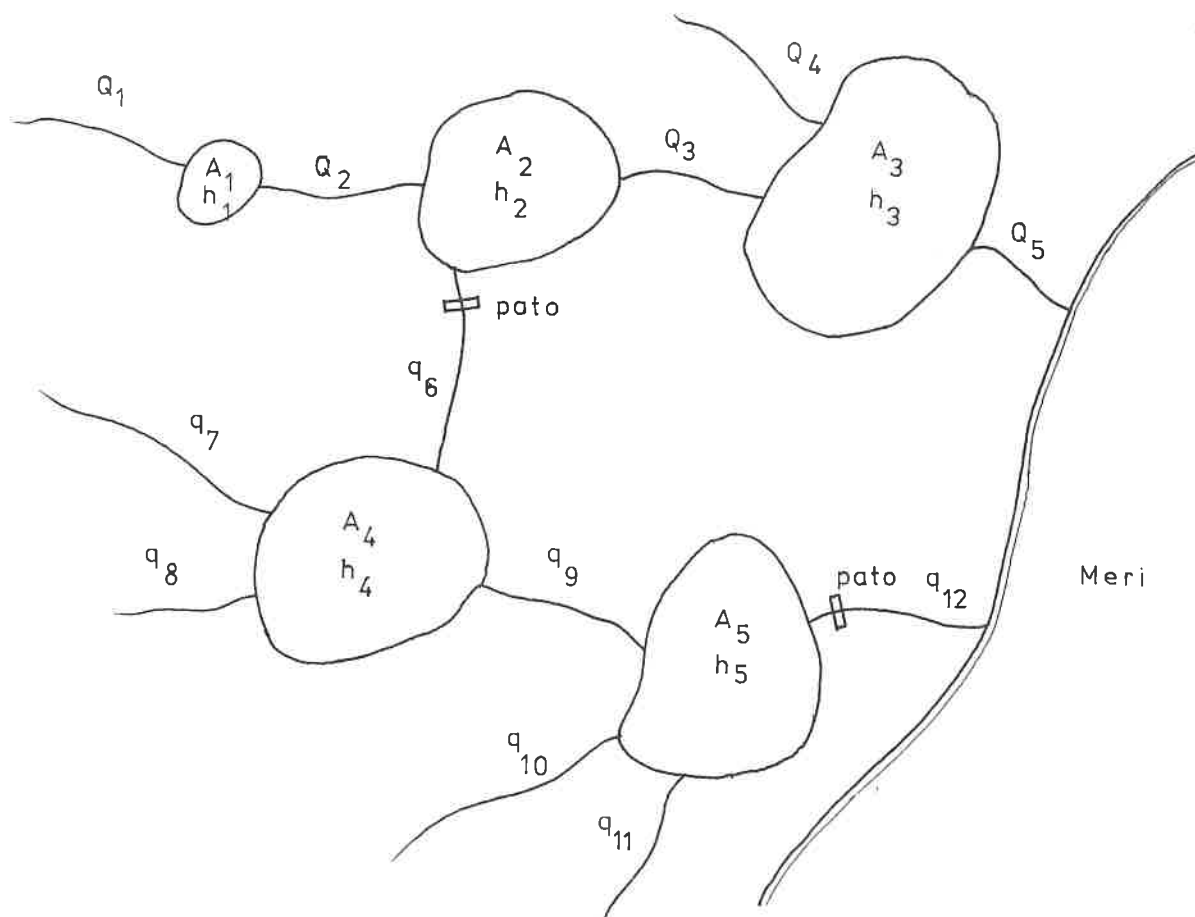
Tällainen analoginen malli voidaan rakentaa hyvinkin suurista vesistösynteesistä. Menettely on lähes mekaaninen: Systeemin tulovirtaamia kuvataan virtageneraattoreilla, altaat kuvataan maan potentiaaliin yhdistettyillä kondensaattoreilla, systeemin sisäiset joet kondensaattorien välisillä johtimilla, ja johtimissa olevat jännitteestä riippuvat vastukset määräytyvät altaitten purkautumiskäyrien perusteella. Kuva 9.2 esittää laajempaa esimerkkiä.

Analogiamallissa kaikki systeemin ulkopuolelta samaan altaaseen tulevat virtaamat kuvataan yhdellä ainoalla virtageneraattorilla. Esim. altaaseen 4 tulevat Q_7 ja Q_8 sekä altaan oman valuma-alueen valunta (jota kuvaan ei ole merkitty) vastaavat yhdessä virtageneraattoria, jonka virta on $i_7 + i_8$.

Lähtötietoina mallin rakentamiseen tarvitaan altaiden pinta-alat ja purkautumiskäyrät sekä synteemiin tulevien virtaamien jakautumat.

Malli voidaan rakentaa diskreeteistä komponenteista. Virtageneraattoreita ohjataan halutulla tavalla, ja virtaamien (päästömuuttujien) kontrollointi toteutetaan säätövastuksien avulla. Tilamuuttujien arvot, jännitteet, rekisteröidään sitten oskilloskoopilla tai piirturilla.

Kuvan 9.2 mukainen sähköinen piiri on ainoastaan periaatteellinen esitys, sellaisenaan se ei kelpaa toteutettavaksi. Virtageneraattoreiden ohjaus vaatii lisää komponentteja. Piiriin tarvitaan kytkimiä tutkittavan toiminnan laukaisemiseksi. Kondensaattorit, joiden integroiva ominaisuus juuri on analoginen altaiden vettä varastoivan ominaisuuden kanssa, on parempi korvata operaatiovahvistimilla toteutetuilla integraattoreilla, ja altaiden purkautumiskäyriä seuraavat jännitteistä riippuvat epälineaariset vastukset voidaan joutua korvaamaan aktiivisilla jänniteohjatuilla resistansseilla. Kysymys on kuitenkin lähinnä teknisen puolen hienosäädöstä, periaate pysyy samana.



Kuva 9.2.. Laajempi allasmalli ja sen analogiapiiri

Rakennettua piiriä voidaan kutsua allasmallin simulaattoriksi. Parhaiten piirin muodostaminen onnistuu, jos käytettävissä on analogiatietokone. Analogiatietokoneessa on suuri määrä tarvittavia komponentteja (operaatiovahvistimia, säätövastuksia, kytkimiä ym.) sekä jännitteiden näyttölaitteet ja piirturit. Mallin rakentaminen tapahtuu yhdistelemällä johdoilla sopivat komponentit (ohjelmoimalla analogiatietokone) siten, että muodostuu haluttu piiri.

Systeemin toiminnan tutkiminen analogisella simulaattorilla on erittäin nopeaa. Yksi ajo kestää ehkä joitakin minuutteja, parametrien ja päätösmuuttujien arvojen muuttaminen käy säätövastuksia kiertämällä, ja tilamuuttujien arvot ajan funktiona saadaan suoraan piirturilta graafisena esityksenä. Kohdefunktion arvoa ei yleensä voida analogiakoneelta saada, ja tarkkuus on digitaaliseen simulointiin verrattuna huono.

Analogia- ja digitaalitietokoneen edut on yhdistetty nk. hybriditietokoneessa, johon kuuluu analogiaosa ja digitaaliosa. Kaikkein parhaisiin simulointituloksiin päästään juuri hybriditietokonetta käyttämällä. Digitaaliosa huolehtii tarvittavista ohjauksista ajon aikana sekä suorittaa kohdefunktion määräämisessä tarvittavat numerolaskut, ja analogiaosa simuloi altaiden toimintaa. Hybriditietokoneita on tällä hetkellä Suomessa vasta yksi, Teknillisen korkeakoulun sähköosaston tiloissa.

10. Yhteenveto

Sovellettaessa matemaattista optimointia vesivarojen suunnittelutehtävään työssä on kolme vaihetta: matemaattisen mallin muodostaminen, tavoitteiden lausuminen kohdefunktion avulla ja optimointitehtävän ratkaiseminen.

Matemaattisen mallin muodostaminen on periaatteeltaan suoraviivainen tehtävä. Systemistä identifioidaan suunnittelutehtävään liittyvät parametrit, ja nämä jaetaan päätösmuuttujiin, tilamuuttujiin, stokastisiin parametreihin ja fysikaalisiin vakioihin. Tilamuuttujat lausutaan sitten kolmen muun ryhmän parametrien avulla parametrien välisiä fysikaalisia riippuvuuksia hyväksi käyttäen. Sopivien päätös- ja tilamuuttujien valinta on yleensä helppoa, päätösmuuttujia suunnittelija voi kontrolloida suoraan ja tilamuuttujia ohjataan päätösmuuttujien avulla.

Matemaattisen mallin muodostamiseen kuuluu vielä fysikaalisiin vakioihin ja stokastisiin parametreihin liittyvien arvojen määrittäminen. Fysikaaliset vakiot (altaiden pinta-alat, pinnan korkeudet, jokien kitkahäviöt) ovat yleensä helposti mitattavissa, ellei niitä tiedetä jo etukäteen. Stokastisten tekijöiden jakautumien määrittämiseen tarvitaan kuitenkin suuri joukko havaintoja aikaisemmilta vuosilta, ja näitä havaintoja ei aina ole riittävästi olemassa. Stokastisten parametrien paras käsittelytapa riippuu saatavissa olevien havaintojen määrästä. Markov-malli vaatii paljon havaintoja, riippumaton malli vähemmän. Yleisenä ohjeena voi sanoa, että systeemin kuvaaminen kannattaa aloittaa pienellä mallilla ja laajentaa mallia sitten, kun käsitys systeemin ominaisuuksista ja sen käyttäytymisestä paranee. Näin malli ei pääse karkaamaan suunnittelijan käsistä.

Tavoitteiden asettaminen ja niiden kuvaaminen kohdefunktiolla on suunnittelu tehtävän tärkein ja samalla vaikein vaihe. Keskenään ristiriitaisten tavoitteiden, kuten altaan vesimäärä voimatalouden kannalta ja altaan pinnan korkeus ranta-asutuksen kannalta, oikea yhteensovittaminen saattaa olla suorastaan mahdotonta. Vaikeutta lisää vielä se, että kohdefunktion muodostamista varten eri tekijöiden vaikutukset olisi saatettava yhteismitalli-

seen muotoon. Esimerkiksi kansantaloudellisia ja luonnonsuojelullisia näkökohtia on vaikeata ellei mahdotonta, mitata samalla mitalla. Kohdefunktio kuvaa aina suunnittelijan subjektiivista kantaa asioihin. Juuri kohdefunktion muodostamisen vaikeus asettaa vakavimman rajoituksen matemaattisen optimoinnin soveltamiselle. Suunnittelijan on syytä pitää mielessä, että hän ei maksimoi mitään objektiivista tai ehdotonta yleistä hyötyä, vaan itse laatimaansa kohdefunktiota.

Kun malli on muodostettu ja kohdefunktio saatu aikaan, on jäljellä optimin haku. Lineaarista optimointia lukuunottamatta monisteessa esitetyt optimointimenetelmät eivät suinkaan ole vielä valmiita ja loppuun saakka kehitettyjä. Päinvastoin, jos optimin haku ei menetelmän perusversiolla löydy, suunnittelijalla on lähes rajattomat mahdollisuudet keksiä modifikaatioita, tutkia eteen tulevia vaikeuksia, tehdä menetelmiin juuri käsillä olevan ongelman vaatimia lisäyksiä, kokeilla eri vaihtoehtoja, arvata optimin mahdollista sijaintia, ja kaikin tavoin käyttää sekä mielikuvitustaan että tietojaan ja intuitiivista käsitystään tarkasteltavasta systeemistä. Optimin haku ei siis ole rutiinityötä lineaarista optimointia lukuunottamatta. Ellei tehtävä laajuutensa vuoksi ole ylivoimaisen vaikea, voidaan sanoa, että likiarvo optimille on aina jollakin keinolla löydettävissä.

Suunnittelutehtävän matemaattinen optimointi ei saa olla sokeaa numeerista laskentaa. Tehtävän kaikissa vaiheissa on pidettävä mielessä todellinen fysikaalinen systeemi ja eri parametrien fysikaaliset tulkinnat. Malli on aina approksimatiivinen, joten parametrien muutosten vaikutus optimointiin on otettava selville. Stokastisten tekijöiden jakautumista on yleensä olemassa vain summittainen käsitys, ja todelliset satunnaissuureiden arvot voivat poiketa paljonkin niille edeltäkäsien ennustetuista arvoista. Kohdefunktioon liittyvät vaikeudet ovat myös huomattavat. Tästä kaikesta johtuu, että optimoinnin tulos ei voi olla ongelman lopullinen ratkaisu. Se on subjektiivisiin oletuksiin perustuvan laskennan tulos, ja siihen tulee suhtautua asiaan kuuluvalla kritiikillä.

KIRJALLISUUTTA

Bellman, R., 1957. Dynamic Programming, Princeton University Press.

Buras, N., 1972. Scientific Allocation of Water Resources, American Elsevier Publishing Company inc.

Chung, K. L., 1974. Elementary Probability Theory with Stochastic Processes, Springer Verlag.

Feller, W., 1970. An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 1, Wiley & Sons.

Gass, S., 1964. Linear Programming, Mc Graw-Hill inc.

Hadley, G., 1962. Linear Programming, Addison - Wesley.

Hadley, G., 1970. Nonlinear and Dynamic Programming, Addison - Wesley.

Hall, W., Dracup, J., 1970. Water Resources Systems Engineering, Mc Graw - Hill inc.