

Vakkilainen P. (1978) Hydrauliiikan perusteet. Luentosarja Oulun yliopistossa. 144 s.

H Y D R A U L I I K A N P E R U S T E E T

P E R T T I V A K K I L A I N E N

SISÄLLYSLUETTELO

1.	JOHDANTO	1
2.	NESTEIDEN YLEISIÄ OMINAISUUKSIA	4
2.1	Määrittelyjä	4
2.2	Viskositeetti	5
2.3	Tiheys	6
2.4	Kokoonpuristuvuus	7
2.5	Pintajännitys ja kapillaari-ilmiö	8
3.	HYDROSTATIIKKA	10
3.1	Määritelmä	10
3.2	Hydrostaattinen paine	10
3.3	Paineen riippumattomuus suunnasta	11
3.4	Eulerin yleiset tasapainoyhtälöt; hydrostatiikan perusyhtälöt	13
3.5	Paine tasopintaa vasten, painekeskus	17
3.6	Paine kaarevaa pintaa vasten	23
3.7	Uivan kappaleen vakavuus	27
4.	HYDRODYNAMIIKKA	31
4.1	Kehityksen kaari	31
4.2	Käsitteitä	32
4.3	Virtauksen kuvaamistavat	34
4.4	Virtauksen nopeus ja kiihtyvyys	36
4.5	Eulerin yhtälöt ideaalinesteelle	37
4.6	Jatkuvuusyhtälö	40
4.7	Bernoullin yhtälö	42
4.8	Kitkan vaikutus	50
4.9	Nesteessä esiintyvät muutokset ja jännitykset ...	51
4.10	Navier-Stokesin yhtälöt	52
4.11	Kitkan vaikutus Bernoullin yhtälöön	54
4.12	Impulssilause	56
4.13	Reynoldsin luku	61
5.	PUTKIVIRTAUS	63
5.1	Yleisiä näkökohtia	63
5.2	Kitkahäviö putkessa	64
5.2.1	Kitkahäviö laminaarisessa virtauksessa ...	67
5.2.2	Kitkahäviö turbulentsisessa virtauksessa .	72

5.3	Paikallishäviöt	82
5.4	Kalliotunnelit	88
5.5	Putkivirtauksen laskeminen	92
6.	AVOUMAVIRTAUS	103
6.1	Yleisiä näkökohtia	103
6.2	Kitkahäviö avouomassa	103
6.3	Nopeuden jakautuminen	105
6.4	Häviöt tasaisessa virtauksessa	107
6.5	Ominaisenergia	113
6.6	Vesikynnys	118
6.7	Epätasainen liike	121
6.7.1	Padotus ja alennus	121
6.7.2	Epätasainen liike luonnonuomissa	123
6.7.3	Epätasainen liike tekouomissa	128
6.8	Paikallishäviöt	128
6.9	Purkautuminen	129
6.10	Uoman poikkileikkauksen suunnittelu	140
7.	PIENOISMALLIT	141

1. JOHDANTO

Hydrauliikka - mitä se on

Hydrauliikassa käsitellään veden virtausta putkissa ja avouomissa (= joissa ja järvissä) sekä maaperässä. Hydraulisia tietoja ja taitoja tarvitaan suunniteltaessa erilaisia hydraulisia systeemejä ja vesirakenteita sillä tavoin, että ne täyttävät niiden toiminnalle asetettavat vaatimukset. Tällöin suunnittelijan on tunnettava lait, jotka määräävät veden liikkeen eri tilanteissa ja hänen on pystyttävä laskemaan voimat, jotka vaikuttavat veden ja rakennelmien välillä.

Vesirakenteiden historia on oleellinen osa ihmiskunnan sivistyksen historiaa. Voidaan perustellusti väittää, että kastelujärjestelmien rakentaminen lisäsi siinä määrin viljasatoja, että ihmisellä jäi aikaa kehittää kulttuuriaan. Vanhojen kastelusysteemien suunnittelijat eivät pystyneet tietävästi perustelemaan rakennelmiaan analyttisin laskelmin, vaan he perustivat ratkaisunsa käytännössä saatuihin kokemuksiin.

Teoreettisen hydrauliikan juuret löytyvät 1600-luvulta. Kehityksen voidaan katsoa edenneen kahta tietä pitkin: osaksi kuljettiin matemaattis-fysikaalisen käsittelyn suuntaan (hydrodynamikka) ja osaksi suuntaan, jossa käytännön tarpeet määräsivät käsittelytavan (hydrauliikka). Bernoulli,

Euler ja Stokes edustivat edellistä, Darcy, Chezy ja Manning jälkimmäistä ajattelutapaa, joskin on todettava, että molempien suuntauksien välillä tapahtui jatkuvaa vuorovaikutusta.

Hydrauliikan moderni kehitys voidaan katsoa alkaneen Osborne Reynolds'in aikaansaannoksista 1800-luvun loppupuolella. Reynolds keskittyi tutkimaan turbulenssia ja toi tämän ilmiön vaikutuksen mukaan yleisiin liikeyhtälöihin.

Prandtl toi hydrauliikkaan rajakerroksen käsitteen kulu-
van vuosisadan alussa. Aerodynamiikan kehitys, joka kulkee yhdessä lentotekniikan kehityksen kanssa, on koitunut monella tapaa hydrauliikan hyväksi. Aerodynamiikan puolelta on tässä yhteydessä erityisesti mainittava von Kármán'in tekemä suurimerkityksinen työ.

Vuosisatamme alusta lähtien on painoa pantu erityisesti sille, että teorian on pidettävä yhtä mittaustulosten kanssa. Samoihin aikoihin alettiin hyväksyä ajatus, että mallikokeilla on saatavissa hyväksyttäviä tuloksia. Mittauksista, jotka suoritetaan pienoismalleilla, voidaan laskea tarvittavat arvot kohteena olevalle prototyypille. Nykyisessä hydraulisessa tutkimuksessa näyttelevätkin mallilaboratoriot keskeistä osaa.

Hydrodynamiikka (hydrauliikka) on toinen osa laajempaa oppirakennelmaa, hydromekaniikkaa. Toinen osa, hydrosta-

tiikka, on oppi nesteiden tasapainosta. Se on eksaktia luonnontiedettä, jonka säännönmukaisuudet voidaan johtaa puhtaasti matemaattisesti ilman laajaa koetoimintaa.

Hydrodynamiikan ja hydrauliikan erosta on syytä vielä mainita, että hydrodynaamisessa (teoreettisessa) tarkastelussa otetaan lähtökohdaksi ns. ideaalinen neste, joka on kokoonpuristumaton ja kitkaton. Hydrauliikassa tarkastellaan taas todellista nestettä (esim. vettä).

2. NESTEIDEN YLEISIÄ OMINAISUUKSIA

2.1 Määrittelyjä

Nestettä voidaan kuvailla pääasiassa kahdesta näkökulmasta:

1) molekyylliteoreettisesti, ts. nesteitä tarkastellaan molekyyllitasolla ja 2) tutkimalla nesteen mekaanisia ominaisuuksia, kuten viskositeettia, kokoonpuristuvuutta, elastisuutta jne. Hydromekaniikassa on viimeksi mainittu näkökulma tärkeämpi.

Neste voidaan määritellä sellaiseksi väliaineeksi, joka määrätyssä lämpötilassa saa sen säiliön muodon, jossa väliaine on. Tällä tavoin määriteltynä nesteiksi luetaan myös kaasut, joiden kokoonpuristuvuus on hyvin suuri, mutta varsinaisilla nesteillä ymmärretään tästä eteenpäin nesteitä, jotka käytännöllisesti katsoen ovat kokoonpuristumattomia.

Nesteen ja kiinteän aineen ero voidaan lausua seuraavasti:

Leikkausvoimien vaikuttaessa neste muuttaa jatkuvasti muotoaan. Syntyvien jännitysten suuruus on suoraan verrannollinen muodon muutoksen nopeuteen.

Kiinteän aineen muodonmuutos on taas suhteessa aiheutettuihin jännityksiin. Jännitysten suuruus riippuu muodonmuutoksen suuruudesta.

2.2 Viskositeetti

Veden viskositeetilla tarkoitetaan sen sisäisestä kitkasta johtuvaa sitkeyttä.

Ajatellaan nestettä rajoittavan kaksi yhdensuuntaista, toisistaan etäisyydellä dy olevaa tasoa. Kun toinen näistä liikkuu tason suunnassa nopeudella u toisen pysyessä paikallaan, vastustaa nesteen sitkeys liikkuvan tason erään pintaosan A liikettä kitkavoimalla F , jonka suuruus on suoraan verrannollinen liikenopeuteen, pinta-alaan sekä eräaseen ns. dynaamisen viskositeetin kertoimeen η , mutta kääntäen verrannollinen tasojen keskinäiseen etäisyyteen. Siis

$$\frac{F}{A} = \tau = \eta \frac{du}{dy} \quad (1)$$

τ = leikkausjännitys

η :lle saadaan dimensioksi Ns/m^2 . Kaava (1) tunnetaan Newtonin kaavana ja se soveltuu kuvaamaan ns. laminaarivirtauksia. Kerroin η ilmaisee nesteen kyvyn vastustaa muodonmuutoksia.

Eräiden laskuyhtälöiden yksinkertaistamiseksi käytetään dynaamisen viskositeetin ohella nesteiden sitkoisuutta määrittelemään ns. kinemaattista viskositeettiä ν , joka saadaan, kun dynaaminen viskositeetti jaetaan nesteen tiheydellä.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (2)$$

Kinemaattisen viskositeetin dimensio on m^2/s .

Ei-newtonilaisten nesteiden käsittely ei kuulu hydraulikkaan (vaan reologiaan).

Koska viskositeetti on riippumaton liikenopeudesta, seuraa Newtonin viskositeettilaista, että jos $du/dy = 0$, niin $\tau = 0$, ts. levossa olevassa nesteessä ei esiinny leikkausjännityksiä.

Erityisesti on syytä korostaa, että Newtonin viskositeettilaki on voimassa ainoastaan laminaarissa virtaustilanteessa. Turbulentissa tilanteessa leikkausjännitykset riippuvat kulloisestakin virtaustilanteesta.

Viskositeetin suuruuteen on lämpötilalla merkittävä vaikutus. Veden dynaamiselle viskositeetille voidaan kokemuksellisesti tietä johtaa seuraava yhteys

$$\eta = \frac{1,78}{1 + 0,0337t + 0,00022t^2} \cdot 10^{-3} \quad (\text{Ns/m}^2)$$

t = veden lämpötila ($^{\circ}\text{C}$)

2.3 Tiheys

Tiheydellä tarkoitetaan massaa tilavuusyksikköä kohti.

Tunnettu asia on, että veden tiheys on suurimmillaan $+4^{\circ}\text{C}$:ssa,

jolloin se on $\rho = 1\,000\text{ kg/m}^3$. Tislattu vesi jäätyy lämpötilassa 0°C , jolloin tilavuus lisääntyy 9 % (jään tiheys on siis $0,917\text{ kg/m}^3$).

Veden tiheys riippuu myös liuenneista ja suspendoituneista aineista. Meriveden tiheydelle voidaan likimäärin kirjoittaa yhteys $\rho = 1\,000 + 0,741S\text{ (kg/m}^3\text{)}$, jossa S on suolapitoisuus prosentteina.

2.4 Kokoonpuristuvuus

Nesteiden kokoonpuristuvuus on suhteellisen vähäistä.

Kokoonpuristuvuus määritellään kaavalla

$$E = - \frac{dp}{dV/V} \quad (3)$$

jossa E = kimmokerroin (N/m^2), dV on tilavuuden V muutos, jonka paineenmuutos dp aiheuttaa.

Vedelle $E = 2,1 \times 10^9\text{ N/m}^2$ normaalipaineessa.

Aineen elastisuus on ehto sille, että paineaallot etenevät. Pieni painehäiriö leviää nopeudella c , joka voidaan laskea kaavasta

$$c = \sqrt{dp/d\rho} = \sqrt{E/\rho} \quad (4)$$

Em. arvot sijoittamalla saadaan c :lle vedessä arvo 1 450 m/s. Kun ääni aiheuttaa pienehkön painehäviön, etenevät ääniaallot ko. nopeudella. Ilmassa etenemisnopeus on ~ 330 m/s.

Putkessa tapahtuvien suurten painesysäysten ollessa kyseessä ei etenemisnopeus ole 1 450 m/s, vaan se jää pienemmäksi, sillä tällaisissa tapauksissa veden ja putken elastisuus vaikuttavat samanaikaisesti. Ohutseinäisen putken tapauksessa voidaan käyttää nopeudelle kaavaa

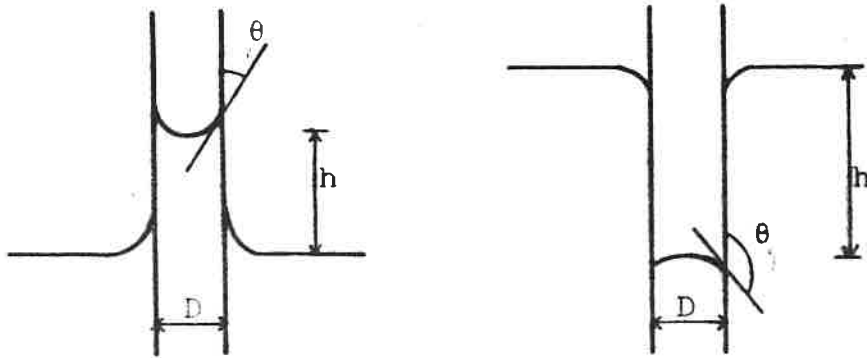
$$c_r = \sqrt{\frac{E/\rho}{1 + \frac{ED}{E_r \cdot s}}} \quad (5)$$

Kaavassa E_r on putken kimmokerroin, D on putken sisähalkaisija ja s on putken seinämän paksuus.

2.5 Pintajännitys ja kapillaari-ilmiö

Kaasun ja nesteen rajapinnalla (tai kahden sekoittumattoman nesteen välillä) vaikuttaa molekulaarisia voimia, jotka antavat rajapinnalle tiettyjä ominaisuuksia. Koska vesimolekyylien keskinäinen vetovoima on suurempi kuin vesi- ja ilmamolekyylien välillä, suuntautuu voimaresultantti vettä kohti. Kohtisuoraan pinnan tason suuntaan verrattuna vaikuttavaa voimaa σ kutsutaan pintajännitykseksi.

Ilman, nesteen ja kiinteän pinnan kosketuskohdassa vaikuttavat pintajännityksen ohella myös nesteen ja kiinteän pinnan väliset adheesiovoimat.



Jos kulma $\theta < 90^\circ$, neste "kastelee". Tällaisessa tapauksessa nestepinta nousee putkessa. Nestepinnan nousun suuruus h saadaan tasapainoyhtälöstä

$$\theta \pi D \cos \theta = \rho g \pi \frac{D^2}{4} h$$

jossa g on painovoiman kiihtyvyys.

Tapauksessa, jossa lasi ja vesi ovat kyseessä, voi θ kohota arvoon 25° , jolloin saadaan

$$h = 3,6 \frac{\sigma}{\rho g D} \quad (6)$$

Vedellä $\sigma = 7,3 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$ (20°C), joten esimerkiksi 10 mm:n läpimittaisessa putkessa vesi nousee noin 2,5 mm.

Luonnossa kapillaarisuudella on tärkeä merkitys. Esimerkiksi maaperässä kapillaarisuus nostaa vettä pintakerrokseen ja huolehtii osaltaan kasvien vedensaannista. Hie-

noissa maalajeissa nostokorkeus voi olla useita kymmeniä metrejä.

3. HYDROSTATIIKKA

3.1 Määritelmä

Hydrostatiikka määritellään opiksi nesteiden tasapainosta. Tieteenä se on varsin vanhaa, sillä sen peruslauseet muotoiltiin jo antiikin aikoina. Edellä todettiin, että nesteen oleminen lepotilassa merkitsee sitä, ettei minkäänlaisia suhteellisia siirtymiä eikä näin ollen myöskään leikkausjännityksiä nesteessä esiinny.

Vaikka käytännössä vesimassassa esiintyykin heikohkoja virtauksia, ne voidaan yleensä jättää laskelmissa huomioonottamatta.

3.2 Hydrostaattinen paine

Nesteeseen vaikuttavat osaksi ns. massavoimat osaksi ns. pintavoimat. Massavoimat ovat suhteessa nesteen massaan ja tällaisia voimia ovat esimerkiksi painovoima, keskipakovoima jne. Pintavoimia ovat esimerkiksi ilman paine nestepintaan ja nesteastian seinistä ja pohjasta tuleva paine. Massavoimien ja pintavoimien tulee olla keskenään tasapainossa, jotta neste olisi lepotilassa. Levossa olevassa

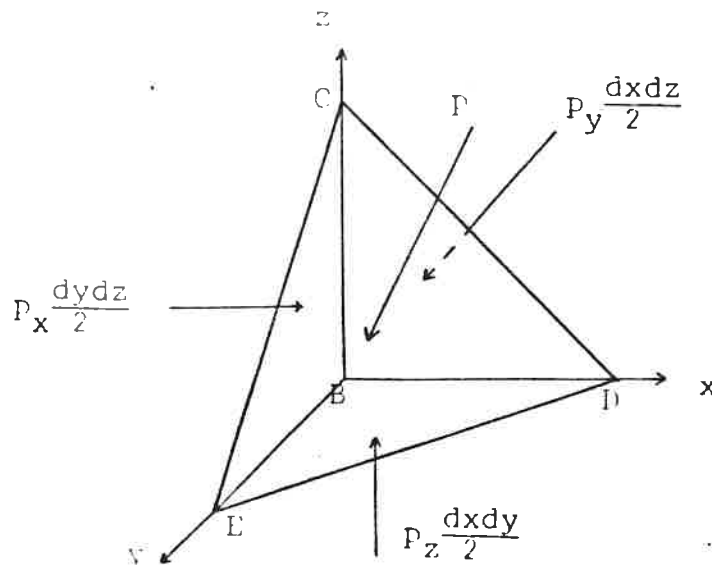
nesteessä vaikuttaa ainoastaan normaalijännityksiä. Jos merkitään jotain mielivaltaista pintaelementtiä dA :lla ja ko. elementtiin vaikuttavaa voimaa dF :llä, niin suhde

$$p = \frac{dF}{dA} \quad (7)$$

määrittelee em. elementtiin kohdistuvan hydrostaattisen paineen. Verbaalisesti ilmaistuna kaava (7) tarkoittaa, että paine määritellään painovoimana pinta-alayksikköä kohden. Paineen yksikkönä käytetään N/m^2 tai N/cm^2 . Yleisesti käytetään yksikkönä myös baaria, $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N/m}^2$.

3.3 Paineen riippumattomuus suunnasta

Olkoon piste B koordinaatiston origo ja edustakoon äärettömän pieni tetraedri BCDE neste-elementtiä, joka erottaa akseleilta janat dx , dy ja dz . p_x , p_y ja p_z ovat paineet vastaavissa suunnissa ja p on paine vinoa pintaa CDE vasten.



Paitsi kuvassa näkyviä painevoimia kohdistuu neste-elementtiin myös massavoimia. Kun painevoimat ovat verrannollisia pinta-aloihin, ovat massavoimat verrannollisia alkion tilavuuteen. Tetraedrin pinnat pienenevät toisessa potenssissa, kun taas tilavuus kolmannessa, joten kun dx, dy ja $dz \rightarrow 0$, voidaan massavoimat mitätöidä. Tästä syystä on painevoimien resultantin oltava tasapainotilanteessa = 0 kaikissa akselisuunnissa (jotta elementti olisi lepotilassa).

Merkitään kulmia, joita pinnan CDE = dA normaali muodostaa koordinaattiakselien x, y ja z kanssa α, β ja γ . Tarkastelemalla kuviota saadaan seuraavat yhtälöt

$$dA \cos \alpha = \frac{dydz}{2} \quad (a)$$

$$dA \cos \beta = \frac{dxdz}{2} \quad (b)$$

$$dA \cos \gamma = \frac{dxdy}{2} \quad (c)$$

Tasapainoehto tetraedrin pintoihin kohdistuville voimille antaa yhtälöt

$$pdA \cos \alpha - p_x \frac{dydz}{2} = 0 \quad (d)$$

$$pdA \cos \beta - p_y \frac{dxdz}{2} = 0 \quad (e)$$

$$pdA \cos \gamma - p_z \frac{dxdy}{2} = 0 \quad (f)$$

Em. yhtälöt yhdistämällä saadaan

$$p_x = p_y = p_z = p \quad (g)$$

Näin ollen: Paine mielivaltaisessa pisteessä on sama kaikissa suunnissa.

Hydrostaattinen paine muuttuu paikan muuttuessa, ts.

$$p = f(x, y, z)$$

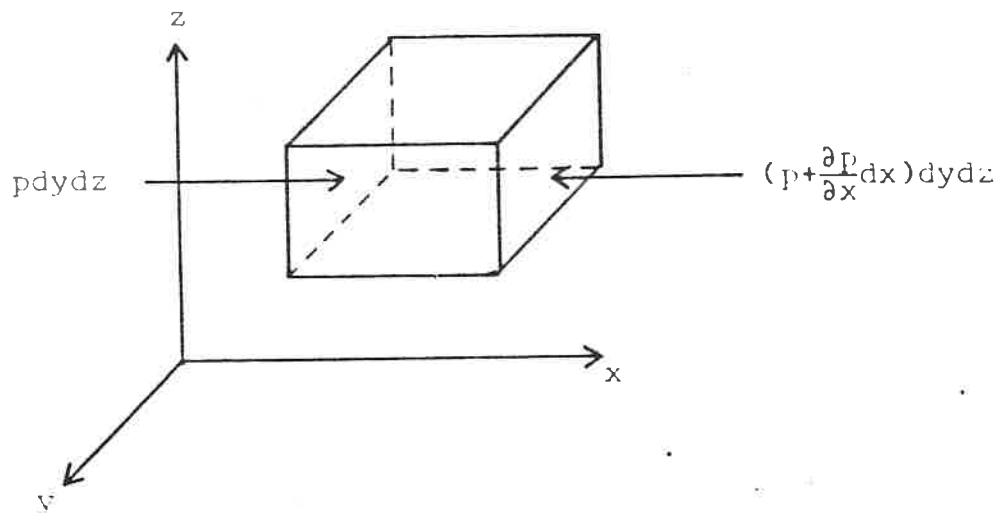
Edellä sanottu pitää paikkansa myös, kun neste-elementti on välittömässä kosketuksessa kiinteätä seinämää vasten. Paine on silloinkin riippumaton seinämän kaltevuudesta ja on aina kohtisuorassa seinää vasten.

Paineen riippumattomuus suunnasta pätee ideaalinnesteelle sekä lepo- että liike-tilassa. Viskoosille nesteille pätee sama, mikäli muodonmuutoksia ei esiinny, sillä ainoastaan sellaisissa tapauksissa leikkausvoimat häviävät.

3.4 Eulerin yleiset tasapainoyhtälöt; hydrostaatiikan perusyhtälöt

Tarkastellaan tilannetta, jossa neste-elementti on tasapainotilassa, ts. siirtymiä eri neste-elementtien välillä ei esiinny. Tällaisen tilanteen yleiset tasapainoyhtälöt esitti ensimmäisenä sveitsiläinen matemaatikko Leonhard Euler (1707-1783).

Tarkastellaan homogeenisessa nesteessä (tiheys ρ) kuutio-
maista elementtiä, jonka sivujen pituudet ovat dx , dy , dz .
Paine pisteessä (x, y, z) olkoon p .



Positiivisia akselisuuntia pitkin vaikuttavia massavoimia
merkitään X , Y , Z . Esitetään tasapainoehto pitkin x -akse-
lia. Oikealle vaikuttava voima saadaan helposti; se on
 $p dy dz$. Painegradientti positiivisen x -akselin suunnassa
voidaan merkitä $\frac{\delta p}{\delta x}$, jolloin paineen muutos etäisyydelle
 dx siirryttäessä on $\frac{\delta p}{\delta x} dx$. Vasemmalle tästä seuraten on
painevoima $(p + \frac{\delta p}{\delta x} dx) dy dz$. Tasapainotilanteessa, kun
massavoima on $\rho dx \cdot dy \cdot dz \cdot X$, pätee:

$$p dy dz + \rho dx \cdot dy \cdot dz \cdot X - (p + \frac{\delta p}{\delta x} dx) dy dz = 0$$

josta päädytään muotoon

$$\frac{\delta p}{\delta x} = \rho \cdot x$$

Muilla akselisuunnilla saadaan vastaavat ilmaisut, joten tasapainoehdoksi tulee

$$\frac{\delta p}{\delta x} = \rho \cdot x \quad (a)$$

$$\frac{\delta p}{\delta y} = \rho \cdot y \quad (b)$$

$$\frac{\delta p}{\delta z} = \rho \cdot z \quad (c)$$

Sanoin ilmaistuna em. yhtälöt tarkoittavat sitä, että painegradientti akselin suunnassa on suoraan verrannollinen nesteen tiheyteen ja vaikuttavaan massavoimaan.

Differenttiaalilaskennan mukaan

$$dp = \frac{\delta p}{\delta x} dx + \frac{\delta p}{\delta y} dy + \frac{\delta p}{\delta z} dz$$

Kerrotaan yhtälö (a) dx:llä, yhtälö (b) dy:llä ja (c) dz:lla ja lasketaan saadut yhtälöt yhteen, niin saadaan

$$\underbrace{\frac{\delta p}{\delta x} dx + \frac{\delta p}{\delta y} dy + \frac{\delta p}{\delta z} dz}_{dp} = \rho x dx + \rho y dy + \rho z dz$$

josta seuraa

$$\boxed{dp = \rho X dx + \rho Y dy + \rho Z dz} \quad (8)$$

Saatua yhtälöä nimitetään hydrostaatiikan perusyhtälöksi.

Kun neste on lepotilassa, on painovoima normaalisti ainoa vaikuttava massavoima. Mikäli z-akseli on suunnattu ylös-päin, tämä tarkoittaa sitä, että

$$X = 0, Y = 0, Z = -g$$

Kun tämä sijoitetaan yhtälöön (8), saadaan

$$dp = - \rho \cdot g \cdot dz$$

Mikäli ρ pysyy vakiona, saadaan integroimalla

$$\int_{p_2}^{p_1} dp = \int_{z_2}^{z_1} -\rho g dz \quad \text{eli}$$

$$p_1 - p_2 = -\rho g (z_1 - z_2)$$

Veden pinnalla vaikuttaa ainoastaan ilmanpaine $p_0 = p_1$, joten absoluuttisen paineen suuruudeksi syvyydellä h saadaan

$$p_2 = \rho g h + p_0 \quad (9)$$

Paine siis lisääntyy lineaarisesti veden syvyyden kasvaessa ja on samalla syvyydellä olevissa pisteissä saman suuruinen.

Normaalisti jätetään ilmanpaine huomioonottamatta, jolloin hydrostaattisella paineella käsitetään

$$p = \rho \cdot g \cdot h = \gamma \cdot h \quad (10)$$

Hydrostaattinen paine on täysin riippumaton sen pinnan muodosta, johon paine vaikuttaa. Paine on sama liikuttaessa yhtä kaukana vapaasta vedenpinnasta.

Esimerkki: Kuinka korkean on elohopeapatsaan oltava, että paineeksi saadaan tekninen ilmakehä?

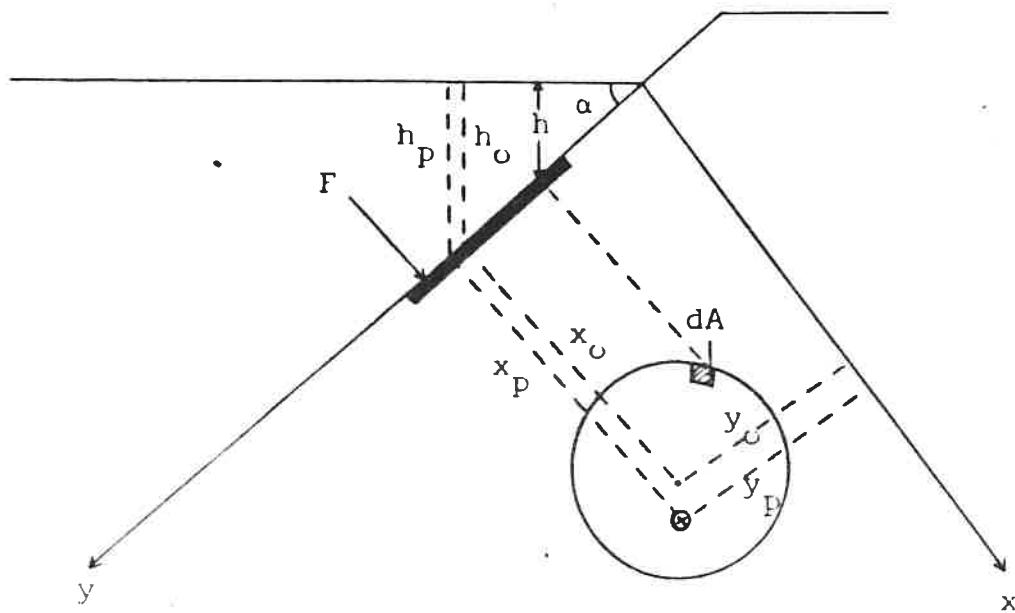
Ratkaisu: Jos patsaan korkeutta merkitään x :llä, saadaan

$$x \cdot 13,6 \text{ g/cm}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 9,81 \text{ kg m/(s}^2\text{cm}^2)$$

$$\underline{x = 0,735 \text{ m}}$$

3.5 Paine tasopintaa vasten, painekeskus

Tarkastellaan homogeenisen tiheyden ρ omaavassa nesteessä olevaa tasopintaa. Tehtävänä on saada selville paineen suuruus ja paineen resultantin vaikutuspisteen paikka.



Pintaelementtiin dA kohdistuvalle voimalle voidaan kirjoittaa

$$dF = p \cdot dA = \gamma \cdot h \cdot dA$$

dA :n etäisyys vapaasta vedenpinnasta on $h = y \cdot \sin \alpha$, joten

$$dF = \gamma \cdot y \cdot \sin \alpha \cdot dA$$

$$F = \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \int_A y dA$$

Integraali $\int y dA$ on pinnan A momentti x -akselin suhteen.

Kun pinnan painopistettä merkitään (x_0, y_0) , on

$$\int y dA = y_0 \cdot A$$

Tästä seuraa edelleen

$$F = \gamma \cdot \sin \alpha \cdot y_0 \cdot A$$

ja kun $y_0 \cdot \sin \alpha = h_0$, voidaan kirjoittaa

$$F = \gamma \cdot h_0 \cdot A \quad (11)$$

Saatu tulos voidaan pukea seuraavaan verbaaliseen muotoon.
Hydrostaattinen paine tasopintaa vasten on sama kuin sen
nestepatsaan paino, jonka pohjana on kyseinen pinta ja
korkeutena pinnan painopisteen etäisyys vapaasta nestepin-
nasta.

Painekekus määritellään kaikkien painevoimien resultantiksi pintaa vasten. Painekekus sijaitsee yleensä painopisteen alapuolella. Ainoastaan silloin, kun taso on vaakasuorassa, painopiste ja painekekus yhtyvät.

Suoritetaan momenttitarkastelu x-akselin suhteen.

$$F \cdot y_p = \int y \, dF$$

Kun nyt $dF = \gamma \cdot h \cdot dA = \gamma \cdot dA \cdot y \cdot \sin \alpha$, saadaan sijoittamalla

$$F \cdot y_p = \int \gamma \cdot dA \cdot y^2 \cdot \sin \alpha = \gamma \cdot \sin \alpha \int y^2 dA$$

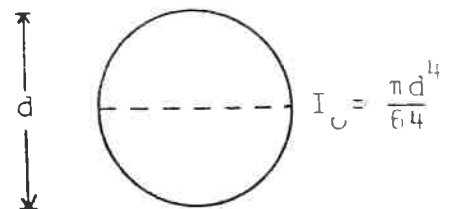
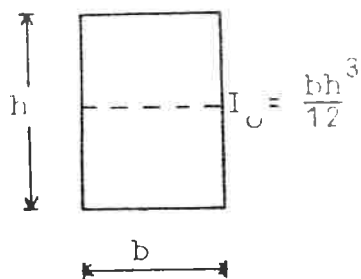
Kun muistetaan, että pinnan hitausmomentti I_x akselin x suhteen on niiden tulojen summa, jotka saadaan, kun kukin pintaosan dA kerrotaan akselistä lasketun etäisyyden y neliöllä, niin havaitaan, että $\int y^2 dA$ on pinnan A hitausmomentti x -akselin suhteen. Näin ollen voidaan kirjoittaa

$$F \cdot y_p = \gamma \cdot \sin \alpha \cdot I_x \quad (a)$$

Jos nyt merkitään pinnan hitausmomenttia painopisteen kautta kulkevan x -akselin suuntaisen, suoran suhteen I_0 :lla, niin Steinerin säännön perusteella voidaan kirjoittaa

$$I_x = I_0 + A \cdot y_0^2$$

y_0 = painopisteen etäisyys x -akselista. I_0 saadaan käsikirjoista. Esimerkkinä hitausmomentit suorakaiteelle ja ympyrälle



Kun $F = \gamma \cdot A \cdot h_0 = \gamma \cdot A \cdot y_0 \cdot \sin \alpha$, saadaan sijoittamalla tämä ilmaisu I_x :n lausekkeen lisäksi yhtälöön (a)

$$\gamma \cdot A \cdot y_0 \cdot \sin \alpha \cdot y_p = \gamma \cdot \sin \alpha \cdot (I_0 + A \cdot y_0^2) \quad \dots$$

$$y_p = \frac{I_0 + A \cdot y_0^2}{A \cdot y_0} = y_0 + \frac{I_0}{A \cdot y_0} \quad (12a)$$

Mikäli hitausmomentti lasketaan painopisteen kautta kulkevan vaakasuoran akselin suhteen, saadaan

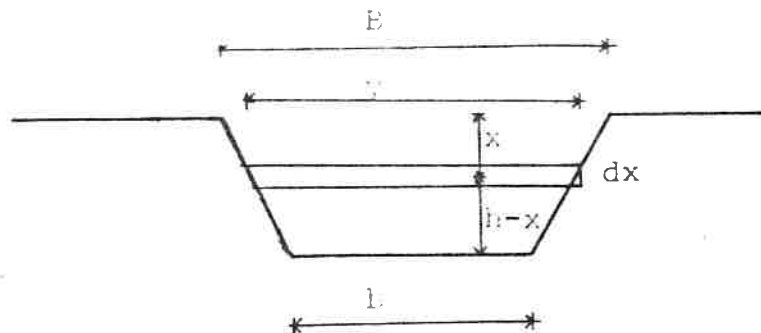
$$y_p = y_0 + \frac{I_0 \sin^2 \alpha}{A \cdot y_0} \quad (12b)$$

Esimerkki: Uoman poikkileikkaus on puolipyörä. Uoma on täynnä vettä ja se suljetaan samanmuotoisella luukulla. Kuinka suuri on paine suljettua luukkua vasten?

Ratkaisu: Ko. luukun painopiste on syvyydellä $4r/3\pi$.
Paine luukkua vasten on siten

$$F = \gamma \cdot h_0 \cdot A = \gamma \cdot \frac{4r}{3\pi} \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \gamma \cdot \frac{2r^3}{3}$$

Esimerkki: Avo-oja, jonka pohjan leveys on b ja pintaleveys B sekä syvyys h padotaan ponttiseinällä. Kuinka suuri on paine patoa vasten, kun oja on täynnä vettä.



Ratkaisu: Painevoima pintaelementtiin on

$$dF = \gamma \cdot x \cdot y \cdot dx = \gamma \int xy dx$$

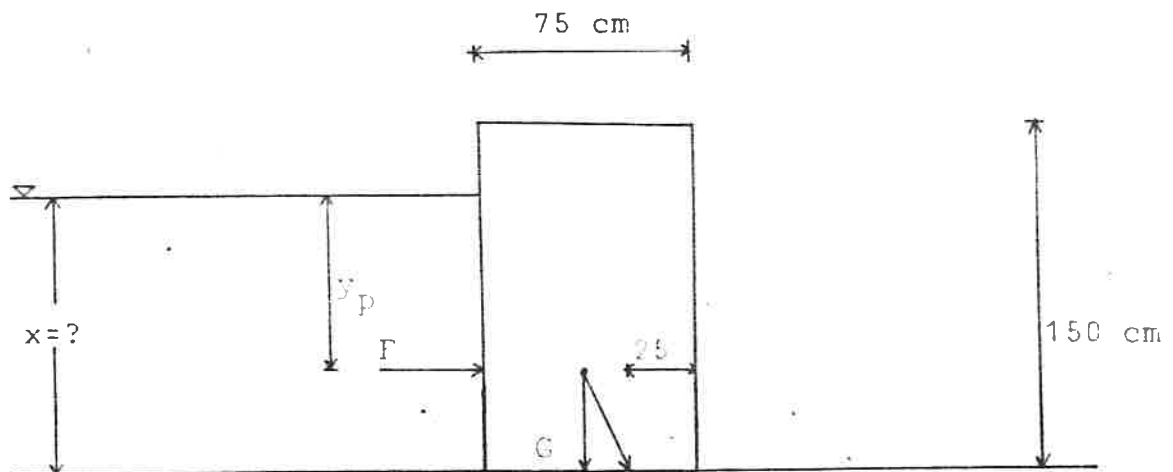
Piirroksesta havaitaan, että

$$y = B - \frac{B - b}{h} \cdot x, \text{ joten}$$

$$F = \gamma \int_0^h \left(Bx - \frac{B - b}{h} x^2 \right) dx$$

$$= \gamma \cdot \frac{B + 2b}{6} \cdot h^2$$

Esimerkki: Kivipato ($\gamma = 30 \text{ kN/m}^3$), jonka poikkileikkaus on suorakaide, on 1,5 m korkea ja 0,75 m leveä. Kuinka korkealle vesi saa nousta, ettei riskiä padon kaatumisesta ole? (Ts. resultantin vaikutuspiste ei mene pohjan keskimäisen kolmanneksen ulkopuolelle).



Vaikuttavat voimat (patometriä kohti) ovat

Padon paino: $G = 30 \cdot 0,75 \cdot 1,5 \cdot 1,0 = 33,75 \text{ kN}$

Paine: $F = \gamma \cdot h_0 \cdot A = 10 \cdot \frac{x}{2} \cdot x \cdot 1,0 = 5x^2$

Painekeskuksen sijainti:

$$y_p = y_0 + \frac{I_0}{A \cdot y_0} = \frac{x}{2} + \frac{\frac{1 \cdot x^3}{12}}{\frac{x}{2} \cdot x \cdot 1} = \frac{2x}{3}$$

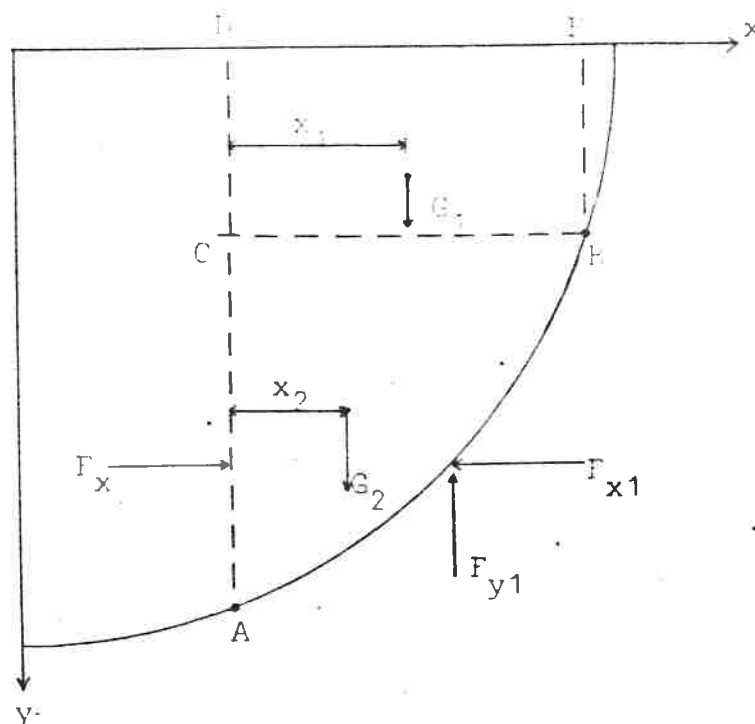
Yhdenmuotoisten kolmioiden perusteella saadaan

$$\frac{5x^2}{33,75} = \frac{0,375 - 0,250}{x - \frac{2x}{3}} \quad \underline{x = 1,36 \text{ m}}$$

3.6 Paine kaarevaa pintaa vasten

Jotta voitaisiin laskea hydrostaattisen paineen suuruus ja resultantin suunta kaarevaa pintaa vastaan, on haettava painevoiman vaaka- ja pystysuuntaiset komponentit. Näiden esillesaamiseksi suoritetaan seuraava yksinkertainen tarkastelu.

Tarkastellaan nesteen sisässä olevaa kaarevan pinnan osaa AB.



- G_1 on tilavuuden BCDE paino
 G_2 on tilavuuden ACB paino
 F_x on pintaan AC kohdistuva painevoima
 F_{x_1} on F_x :n aiheuttama reaktiovoima
 F_{y_1} on G_1 :n ja G_2 :n aiheuttama reaktiovoima

Ko. voimat pitävät yllä tasapainotilaa.

Tällöin voidaan kirjoittaa

$$F_{x_1} = F_x \text{ ja } F_{y_1} = G_1 + G_2$$

F_x saadaan lasketuksi aiemmin johdetuilla tasopintaan vaikuttavien paineiden kaavoilla, samoin F_{x_1} . Verbaalisesti ilmaistuna: Kaarevaan pintaan kohdistuvan hydrostaattisen paineen horisontaalikomponentti on yhtäsuuri kuin hydrostaattinen paine olisi pinnan vertikaaliprojektioon:

$$F_x = F_{x_1} = \gamma \cdot h_0 \cdot A$$

F_{y_1} on suuruudeltaan siis sama kuin tilavuuden ABED paino ja sen vaikutuspiste saadaan momenttiyhtälöstä:

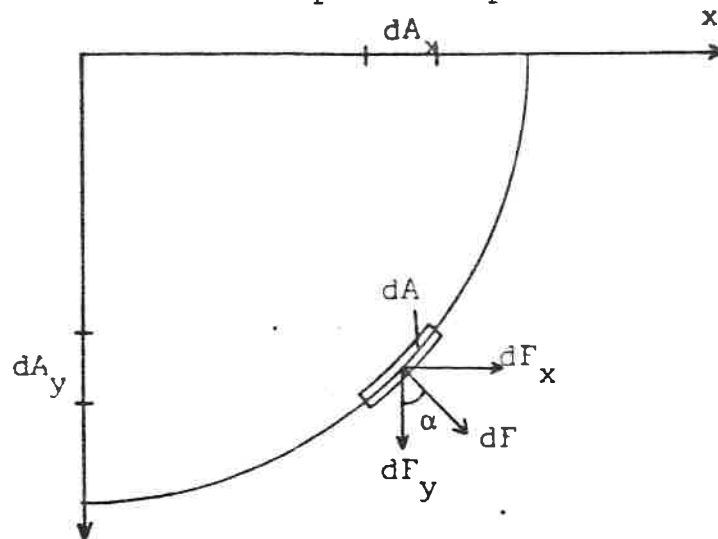
$$x_1 \cdot G_1 + x_2 \cdot G_2 = (G_1 + G_2) \cdot x$$

$$x = \frac{x_1 \cdot G_1 + x_2 \cdot G_2}{G_1 + G_2}$$

Eli sanoin lausuttuna: Vertikaalinen painevoima kaarevaa pintaa vasten on yhtäsuuri kuin nestepatsas, jota alhaalla

rajoittaa ko. pinta ja ylhäällä tämän pinnan projektio nestepinnalle. Samantekevää on, täyttääkö neste tämän tilan kokonaan vai ei.

Samaan lopputulokseen päästään suorittamalla vastaavanlainen tarkastelu kuin tasopinnan tapauksessa:



Pintaan dA kohdistuvalle painevoimalle voidaan kirjoittaa

$$dF = \gamma \cdot y \cdot dA$$

$$dF_x = \gamma \cdot y \cdot dA \cdot \sin \alpha$$

$$dF_y = \gamma \cdot y \cdot dA \cdot \cos \alpha$$

Integroimalla saadaan

$$F_x = \gamma \cdot \int y dA \sin \alpha = \gamma \cdot \int y dA_y = \gamma \cdot y_0 \cdot A_y$$

y_0 = vertikaaliprojektion painopiste

$$F_y = \gamma \cdot \int y dA \cos \alpha = \gamma \cdot \int y dA_x = \gamma \cdot V$$

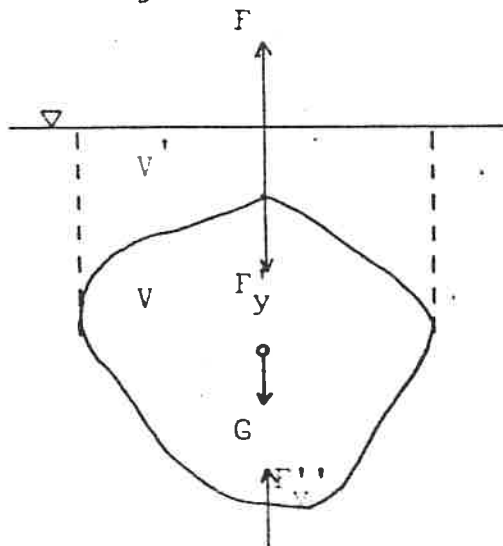
V = tilavuus tarkasteltavan pinnan yläpuolella.

Siis myös tätä kautta päädytään kaavoihin:

$$F_x = \gamma \cdot y_0 \cdot A \quad (13a)$$

$$F_y = \gamma \cdot V \quad (13b)$$

Esimerkki: Johda Arkimedeen periaate kaareville pinnoille johdettujen lausekkeiden avulla:



γ = nesteen ominaispaino

F = jännitys langassa

F_y' = painevoima alaspäin

F_y'' = painevoima ylöspäin

G = kappaleen paino

Voimille voidaan kirjoittaa tasapainoehto:

$$F + F_y'' = F_y' + G$$

Kaavan (13b) mukaisesti saadaan F_y' :lle ja F_y'' :lle:

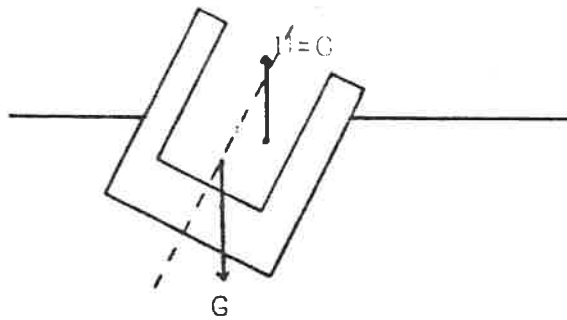
$$F_y'' = \gamma(V' + V), \quad F_y' = \gamma \cdot V', \quad \text{joten}$$

$$F + \gamma(V' + V) = \gamma \cdot V' + G$$

$$F = G - \gamma V$$

3.7 Uivan kappaleen vakavuus

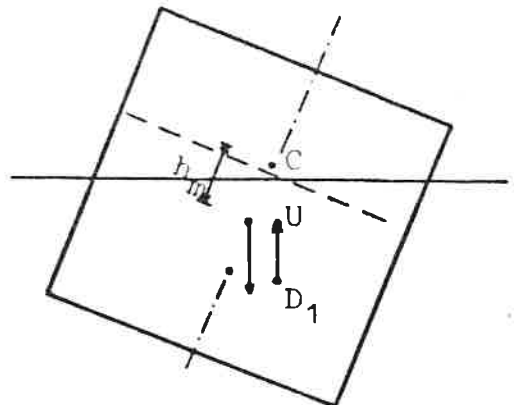
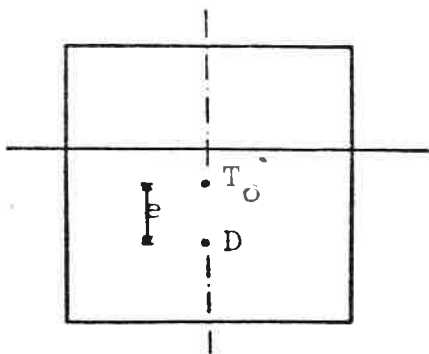
Uiva kappale on aina vakaa, mikäli kappaleen painopiste on alempana kuin uppouman painopiste. Lepotilassa sijaitsevat mainitut pisteet samalla pystysuoralla. Mikäli kappaletta heilautetaan, syntyy stabiloiva momentti, joka pyrkii palauttamaan tasapainotilanteen.



Seuraavassa tarkastellaan tasapainoehtoja sellaisessa tilanteessa, jossa uppouman painopiste on kappaleen painopisteen alapuolella.

Uivalle kappaleelle (laiva tai kasuuni) pätee, että kappaleen paino G on yhtäsuuri kuin noste U . G vaikuttaa kappaleen painopisteessä T_0 ja U uppouman painopisteessä D .

T_0 :n ja D :n etäisyys olkoon e .



Jos nyt heilautetaan kappaletta hiukan, ui kappale vakaasti ainoastaan, mikäli G ja U muodostavat voimaparin, joka pyrkii palauttamaan tasapainotilanteen. Heilautuksessa uppouman painopiste muuttuu kohtaan D_1 . Noste kasvaa kappaleen oikealla puolella ja pienenee vasemmalla.

D_1 :n kautta piirretty pystysuora leikkaa symmetria-akselin pisteessä C , jota kutsutaan metasentrumiksi. Voimapari palauttaa tasapainon ainoastaan, mikäli h_m eli etäisyys $C - T_0$ on suurempi kuin 0, i. piste C on kappaleen painopisteen T_0 yläpuolella.

Vaihtokorkeus eli metasentrum lasketaan kaavasta

$$h_m = \frac{\rho \cdot g \cdot I}{G} - e = \frac{I}{V} - e \quad (14)$$

I = kappaleen ja nestepinnan leikkausviivan rajoittaman pinnan hitausmomentti.

Mikäli ui van kappaleen sisällä on vapaa nestepinta, ei kaava (14) käy, vaan on käytettävä kaavaa

$$h_m = \frac{I - \frac{\gamma_0}{\gamma} I_0}{V} - e \quad (15)$$

γ_0 = kappaleen sisällä olevan nesteen ominaispaino

γ = ympäröivän nesteen ominaispaino

I_0 = kappaleen sisällä olevan nestepinnan hitausmomentti sen oman painopisteakselin suhteen.

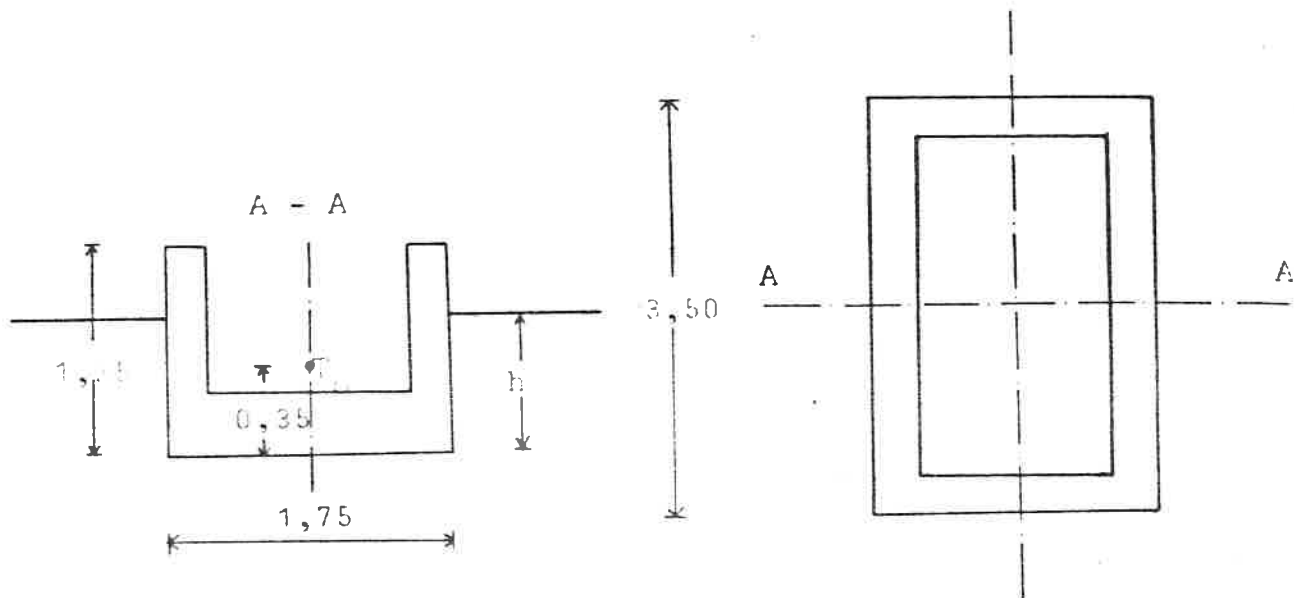
Jos h_m on suuri, ovat aluksien heilahtelut jyrkkiä.

"Miellyttävälle" h_m :lle voidaan antaa seuraavia arvoja:

purjelaivat	90...150 cm
sotalaivat	75...130 cm
rahtilaivat	60...90 cm
matkustajalaivat	45...60 cm

Esimerkki: Tarkista piirroksessa esitetyn kasuunin vakavuus.

Kasuuni painaa 3 000 kg ja veden tiheys on $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$



$$\text{Kasuunin uintisyvyys } h = \frac{3000 \cdot g}{1,75 \cdot 3,5 \cdot 1000 \cdot g} = 0,49 \text{ m}$$

Kallistus lyhyen akselin ympäri:

$$\text{hitausmomentti } I = \frac{1,75 \cdot 3,5^3}{12} = 6,25 \text{ m}^4$$

$$e = 0,35 - \frac{0,49}{2} = 0,10 \text{ m}$$

$$h_m = \frac{\rho \cdot g \cdot I}{G} - e = \frac{6,25}{3,00} - 0,10 = 1,98 \text{ m} > 0$$

Kallistus pitkän akselin ympäri

$$\text{hitausmomentti } I = \frac{3,5 \cdot 1,75^3}{12} = 1,56 \text{ m}$$

$$h_m = \frac{1,56}{3,00} - 0,10 > 0$$

Havaitaan, että kasuuni on stabiili molempien akseliensa suhteen.

4. HYDRODYNAMIIKKA

4.1 Kehityksen kaari

Oppia nesteiden liikkeistä nimitetään hydrodynamiikaksi. Tämä tieteen kehitys on myötäillyt historiallisesti tarkastellen matemaattisen fysiikan muiden osien kehitystä. Niinpä sen eteenpäinmenoa tapahtui merkittävästi vasta sitten, kun differentiaaalilaskenta kehittyi (ts. Newtonin jälkeen). Tätä ennen oli luonnollisesti tehty lukuisia yrityksiä tieteenhaaran järkevään kehittämiseen, mutta turhaan.

Nesteen partikkeleihin vaikuttaa joka hetki niiden ympäristö. Jotta voitaisiin täydellisesti kuvata neste-elementin liikkeitä, olisi sen tähden välttämätöntä, että jokaisen neste-elementin liike kunakin hetkenä voitaisiin määrätä. Käytännössä ei kuitenkaan voi tulla kyseeseen yksittäisten partikkelien liikkeiden seuranta. Täysin riittävää on tietää, kuinka suuria nopeuksia ja paineita on nesteen jokaisessa pisteessä. Tästä syystä on välttämätöntä, että nopeuden ja paineen kolme komponenttia kussakin nesteen pisteessä esitetään ajan funktiona.

Vuonna 1755 esitti Leonhard Euler yleiset liikeyhtälöt ideaalinesteille ja laski pohjan modernille hydrodynamiikalle. Näiden yhtälöiden soveltaminen on osoittautunut kuitenkin hankalaksi. Vaikeudet ovat osittain luonteeltaan matemaattisia, mutta ongelmana on ennen muuta, että todelliset nesteet eivät ole ideaalisia, vaan kitkan vaikutus on merkittävä.

Mutta matemaattisen mallin tavoittelu jatkui myös viskoosien nesteiden liikkeiden kuvaamiseksi. Ranskalainen Navier onnistui yrityksissään 1822 ja englantilainen Stokes v. 1845. Heidän kehittämäänsä yhtälöitä kutsutaan Navier-Stokesin yhtälöiksi. Näissä yhtälöissä onnistuttiin täyttämään vaatimus, että myös kitka on saatava tarkastelun piiriin.

Kaikissa suunnissa tapahtuvan kolmidimensionaalisen virtauksen ratkaisu on tätä kautta kuitenkin ylivoimainen tehtävä. Mikäli virtaukselta puuttuu nopeuskomponentti jossakin suunnassa, ts. tilanne on kaksidimensionaalinen, on ongelma helpompi, mutta vieläkin vaikeudet ovat suuret, jos neste on viskoosia. Jonkinlaisia sääntöjä on kuitenkin oltava, jotta käytännön ongelmat voitaisiin ratkaista. Onneksi osoittautuu, että usein voidaan käyttää yksidimensionaalista tarkastelutapaa, jolloin tarkastellaan nesteen kulkua ainoastaan virtauksen pääsuunnassa ja rajoitutaan keskimääräiseen tilanteeseen. Kokeellisesti saatujen kertoimien avulla pyritään teoreettisesti saadut tulokset saamaan yhteneväisiksi todellisten olosuhteiden kanssa.

4.2 Käsitteistä

Rataviiva, virtaviiva

Rataviivalla ymmärretään neste-elementin tai partikkelin kulkemaa todellista rataa.

Virtaviiva on viiva, joka jokaisessa kohdassa antaa nopeu-

den suunnan, ts. jokaisessa virtaviivan pisteessä on ko. pisteessä vallitsevan nopeuden suunta tangentti virtaviivalle.

Virtaustyyppit

- Stationäärinen l. pysyvä virtaus: virtaus ei muutu ajan funktiona
- epästationäärinen l. muuttuva virtaus: virtaus muuttuu ajan funktiona (esim. paineisku)
- tasainen virtaus: virtaustekijät (paine, nopeus, tiheys) eivät muutu paikan mukaan
- epätasainen virtaus: virtaus muuttuu paikan mukaan.

Virtaustila

- Laminaarinen virtaus. Nestepartikkelin keskimääräinen nopeus on sama kuin virtauksen keskimääräinen nopeus. Partikkelien liikettä voidaan kuvata virtaviivoilla. Nestekerrosten välillä ei tapahdu sekoittumista
- turbulenttinen virtaus. Sisäisen kitkan ansiosta ja nesteen ja kiinteän pinnan välisen kitkan ansiosta syntyvä virtaustila, jossa partikkelin nopeus ja suunta poikkeavat sattumanvaraisesti keskimääräisistä arvoista.

Nopeuden hetkelliselle arvolle pätee

$$u = \bar{u} + u'$$

u = nopeuden hetkellinen arvo

$\bar{u}$ = nopeuden keskiarvo (deterministinen osa)

u' = muutos keskiarvosta (stokastinen eli satunnainen osa)

Virtauskentässä turbulenssi vaikuttaa kahdella tapaa:

- 1) aiheuttaa leikkausjännityksiä
- 2) aiheuttaa pyörteisen sekoittumisen.

Pyörteisen viskositeetin kertoimet eivät ole fysikaalisia vakioita, vaan ne riippuvat liikkeen luonteesta, mittakaavasta ja stabilisuudesta.

4.3 Virtauksen kuvaamistavat

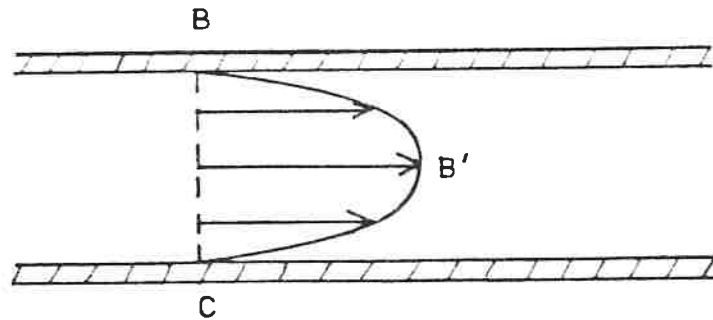
Lagrangen tapa

Joseph Louis Lagrange'n (1736...1813) metodissa kuvataan yksityisen nestepartikkelin liikettä. Yksittäisen partikkelin rataviiva käy esimerkistä. Toisin sanoen partikkelin sijainti pyritään määräämään funktiona alkusijainnista ja ajasta. Sama koskee painetta, nopeutta, kiihtyvyyttä jne. Esim. x-akselin suunta:

$$x = f(a, b, c, t)$$

Eulerin tapa

Eulerin kenttätarkastelussa virtausta luonnehtivat suureet kuvataan funktioina paikasta ja ajasta. Tarkastellaan esimerkiksi virtausta putkessa:



BB'C esittää nopeuden jakautumista poikkileikkauksessa.

Eri partikkelit sivuuttavat keskeytymättä leikkauksen, mutta partikkeleja ei tunneta, jotka tietyllä hetkellä ohittavat leikkauksen. Nopeus, jolla ne ohittavat leikkauksen, voidaan sitä vastoin ilmoittaa, samoin nopeusjakautuma tunnetaan. Yleisesti tarkoittaa Eulerin metodi, että nopeus, paine, kiihtyvyys, tiheys jne. ilmoitetaan koordinaattien x , y ja z ja ajan t funktiona:

$$\begin{cases} v_x = f_1(x, y, z, t) \\ v_y = f_2(x, y, z, t) \\ v_z = f_3(x, y, z, t) \end{cases}$$

Vektorimuodossa

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z$$

4.4 Virtauksen nopeus ja kiihtyvyys

Virtauksen nopeus vaihtelee yleensä sekä ajan että paikan funktiona

$$v = f(s, t)$$

Derivoimalla saadaan seuraava ilmaisu

$$dv = \frac{\partial v}{\partial s} ds + \frac{\partial v}{\partial t} dt$$

Kun tämä jaetaan dt :llä, saadaan

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} = v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{dv}{dt} = \text{kokonaiskiihtyvyys}$$

$$v \frac{\partial v}{\partial s} = \text{konvektiivinen kiihtyvyys}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \text{paikallinen kiihtyvyys}$$

$v \frac{\partial v}{\partial s}$ voidaan kirjoittaa muotoon $\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s}$. Fysikaalisesti tämä ilmaisu tarkoittaa sitä kiihtyvyyttä, joka on oltava, jotta nopeudesta v päästäisiin matkalla ds nopeuteen $v + dv$. $\frac{\partial v}{\partial t}$ ilmaisee nopeuden muutokset tietyssä pisteessä. Stationäärisessä virtauksessa $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$.

Kokonaiskiihtyvyys $\frac{dv}{dt} = \vec{a}$ on vektorisuure, jonka vektorikomponenteille voidaan kirjoittaa

$$\bar{a}_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad \bar{a}_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad \bar{a}_z = \frac{dv_z}{dt}$$

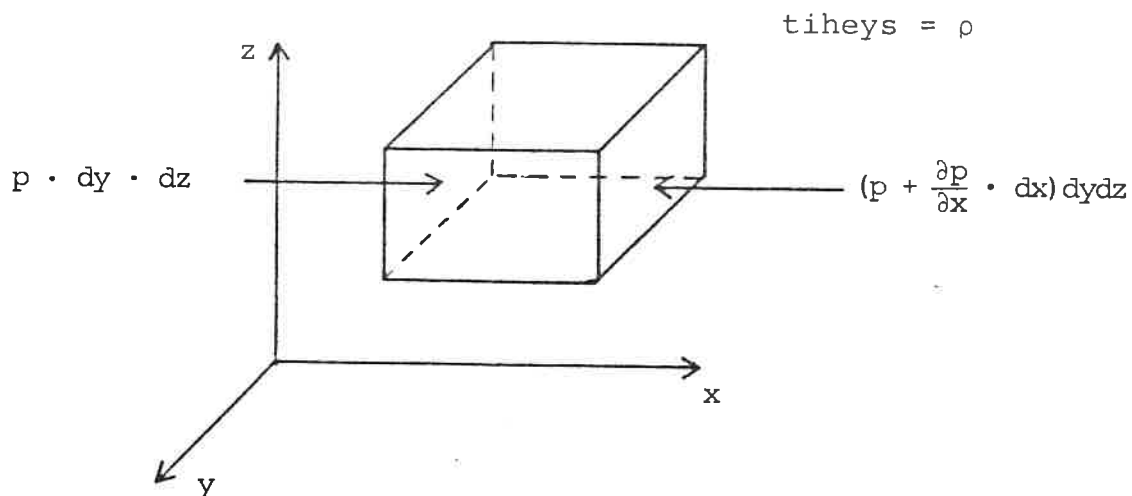
Kiihtyvyyden komponenteille saadaan lausekkeet:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x = \frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{array} \right. \quad (16)$$

Stationäärisessä virtauksessa pätee

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$$

4.5 Eulerin yhtälöt ideaalinesteelle



Newtonin mukaan

$$\text{Voima} = \text{massa} \times \text{kiihtyvyys}$$

Olkoon kiihtyvyys suunnassa x $\frac{dv_x}{dt}$, tällöin hitausvoima on:

$$\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{dv_x}{dt}$$

Jos x -akselin suunnassa vaikuttavaa massavoimaa massayksikköä kohti merkitään X :llä, niin piirroksen esittämään särmioon vaikuttava massavoima on:

$$\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot X$$

x -akselin suunnassa eri sivuihin vaikuttavien painevoimien ero on:

$$(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy \cdot dz - p \cdot dy \cdot dz = \frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz$$

Projektioyhtälöksi x -akselin suunnassa saadaan

$$\rho \cdot X \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz = \rho \cdot \frac{dv_x}{dt} dx \cdot dy \cdot dz$$

$$= 0$$

Kun yhtälö jaetaan $dx \cdot dy \cdot dz$:lla, se saadaan muotoon:

$$\rho \cdot \frac{dv_x}{dt} = \rho \cdot X - \frac{\partial p}{\partial x}$$

Muissa koordinaattisuunnissa saadaan vastaavat ilmaisut, joten

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \cdot \frac{dv_x}{dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \cdot \frac{dv_y}{dt} = \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \cdot \frac{dv_z}{dt} = \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} \end{array} \right. \quad (17)$$

Huomataan, että hydrostaatiikan perusyhtälöihin verrattuna erona on vain hitaustermin mukaantulo. Tilanne on kuitenkin huomattavasti hankaloitunut, joka ilmenee, kun kirjoitetaan esimerkiksi suunnassa x yhtälön täydellinen muoto:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ & = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned}$$

Stationäärisessä virtauksessa $\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0$, jolloin yhtälö x-suunnassa saa muodon:

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x}$$

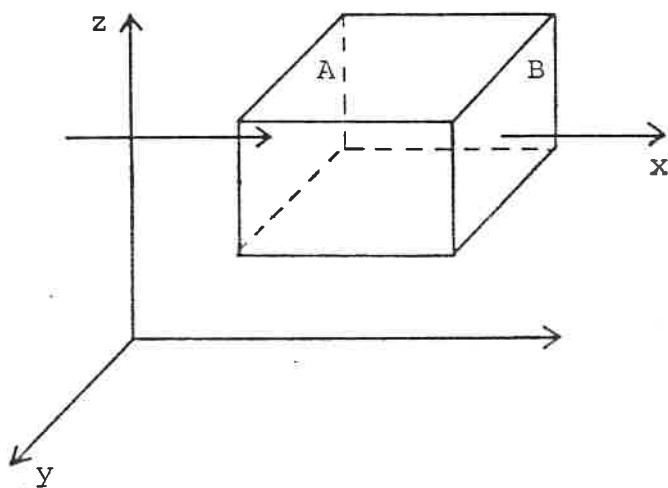
Leonhard Euler johti v. 1755 em. liikeyhtälöt ideaaliselle nesteelle. Nämä differentiaaliyhtälöt ovat epälineaarisia, vaikka niitä johdettaessa on melkoisia yksinkertaistavia oletuksia tehtykin. Niiden ratkaiseminen onnistuukin vain harvoissa erikoistapauksissa, joten hydraulikassa niitä ei juuri käytetä.

Eulerin yhtälöt ovat kuitenkin johtaneet mm. Bernoullin yhtälön esittämiseen, joten niiden esittäminen lienee asi-

allista käytännön hydrauliikassa käytettävien yhtälöiden taustan ymmärtämiselle.

4.6 Jatkuvuusyhtälö

Eulerin yhtälöiden tuntemattomia ovat nopeuskomponentit, painefunktio ja tiheysfunktio eli yhteensä 5 kpl. Eulerin yhtälöitä on vain kolme, joten ne eivät riitä. Lisäyhtälö saadaan huomaamalla, ettei neste voi revetä.



Pinnan A läpi menee särmiöön aikayksikössä nestemassa $\rho \cdot v_x \cdot dy \cdot dz$ ja ajassa dt siten määrä $\rho \cdot v_x \cdot dy \cdot dz \cdot dt$. Pinnan B läpi virtaa ajassa dt pois särmiöstä määrä

$$\left(\rho v_x + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz \cdot dt$$

jolloin on otettu huomioon myös se seikka, että ρ voi muuttua.

Kun vastaava tarkastelu suoritetaan muissa akselisuunnissa, havaitaan, että ajassa dt särmiön sisältä virtaa pois nestemäärä

$$(a) \quad \left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] dx dy dz dt$$

Tämän johdosta tiheyden, joka ajanhetkenä t oli ρ , on täytynyt ajanhetkenä $t + dt$ muuttua arvoon $\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dt$. Särmiön sisällä olevan nestemassan määrä aikavälinä dt on siis muuttunut määrällä

$$(b) \quad \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dx dy dz - \rho dx dy dz = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$$

Koska ainetta ei häviä, on edellä mainittujen nestemäärien muutosten summa $= 0$. $\left[(a) + (b) \right] = 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt + \left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] dx dy dz dt = 0$$

josta tullaan nestevirtauksen jatkuvuusyhtälöön

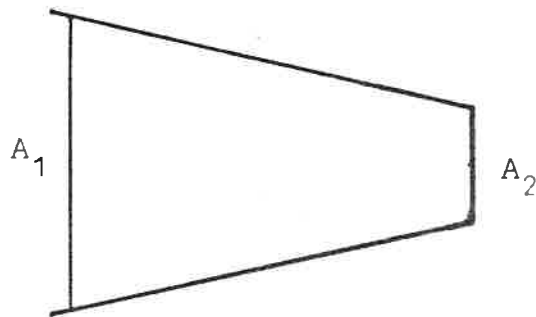
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

Mikäli neste on kokoonpuristumatonta, ts. ρ on vakio, jolloin $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, niin voidaan kirjoittaa:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (18)$$

Näin on asianlaita esim. vedelle.

Hydrauliikassa tyydytään tavallisesti keskimääräisiin virtausnopeuksiin, jolloin putki- ja avouomavirtaukselle saadaan seuraava yksinkertainen jatkuvuusyhtälö (v = keskimääräinen nopeus)



$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

(19)

Esimerkki: Virtaus on kokoonpuristumatonta ja stationääristä. Ovatko seuraavat v_x ja v_y mahdollisia?

a) $v_x = 4xy + y^2$

$$v_y = 6xy + 3x$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 4y$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 6x$$

$$4y + 6x \neq 0$$

mahdoton

b) $v_x = 2x^2 + y^2$

$$v_y = -4xy$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 4x$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = -4x$$

$$4x - 4x = 0$$

mahdollinen

4.7 Bernoullin yhtälö

Virtaputkella tarkoitetaan virtaviivojen muodostamaa ajateltua putkea, joka ei päästä nestettä ulos eikä sisään.

Kun Bernoulli (1700-1783) yritti integroida Eulerin yhtälöitä, hän tarkasteli virtaputkessa tapahtuvaa nestevirtausta. Bernoulli sovelsi Eulerin yhtälöitä, joten neste, jota hän tarkasteli, oli ideaalista. Toiseksi jatkuvuusyhtälön on oltava voimassa. Voimakentän tulee olla pyörteetön, kuten on asianlaita painovoimakentässä. Neljänneksi, suureiden ja niiden ensimmäisten derivaattojen oltava yksikäsitteisiä ja jatkuvia.

Lähtökohtana Bernoullilla olivat siis Eulerin yhtälöt

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_x}{dt} = x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv_y}{dt} = y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dv_z}{dt} = z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{array} \right.$$

Kerrotaan ensimmäinen yhtälö dx:llä, toinen dy:llä ja kolmas dz:lla ja lasketaan yhtälöt yhteen. Saadaan

$$\frac{dv_x}{dt} dx + \frac{dv_y}{dt} dy + \frac{dv_z}{dt} dz = xdx + ydy + zdz$$

(a)

$$- \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right)$$

Kun edellytetään voimakenttä konservatiiviseksi eli pyörteetömäksi, niin:

$$x = - \frac{\partial U}{\partial x} , \quad y = - \frac{\partial U}{\partial y} , \quad z = - \frac{\partial U}{\partial z}$$

U = voimakentän potentiaalfunktio
jolloin

$$(b) \quad -dU = Xdx + Ydy + Zdz$$

Kun huomataan, että yhtälön (a) oikealla puolella sulussa oleva lauseke $= dp$, saadaan integroimalla yhtälö (a) pisteestä A pisteeseen B:

$$(c) \quad \int_{AB} \left(\frac{dv_x}{dt} dx + \frac{dv_y}{dt} dy + \frac{dv_z}{dt} dz \right) = -U - \int_{AB} \frac{dp}{\rho} + C$$

jossa C on integroimisvakio.

Bernoulli ajatteli, että integrointi A:sta B:hen tapahtuu pitkin virtaviivaa. Virtaviivoille voidaan kirjoittaa yhtälöt

$$(d) \quad \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

Virtaviivojen tangentti on joka hetki joka kohdassa nopeusvektorin suuntainen

Virtaviivojen yhtälöistä seuraa:

$$(e) \quad \begin{cases} v_y dx = v_x dy \\ v_z dy = v_y dz \\ v_x dz = v_z dx \end{cases}$$

Kun näistä otetaan huomioon ensimmäinen ja kolmas, saadaan:

$$\begin{aligned}
 \frac{dv_x}{dt} dx &= \frac{\partial v_x}{\partial t} dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y dx + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z dx \\
 &= \frac{\partial v_x}{\partial t} dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_x dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_x dz \\
 &= \frac{\partial v_x}{\partial t} dx + v_x \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz \right) \\
 &= \frac{\partial v_x}{\partial t} dx + v_x dv_x
 \end{aligned}$$

Näinollen

$$(f) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} dx &= \frac{\partial v_x}{\partial t} dx + v_x dv_x \\ \frac{dv_y}{dt} dy &= \frac{\partial v_y}{\partial t} dy + v_y dv_y \\ \frac{dv_z}{dt} dz &= \frac{\partial v_z}{\partial t} dz + v_z dv_z \end{aligned} \right.$$

Integraalista

$$\int_{AB} \left(\frac{dv_x}{dt} dx + \frac{dv_y}{dt} dy + \frac{dv_z}{dt} dz \right) \quad \text{saadaan}$$

$$\int_{AB} \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} dx + \frac{\partial v_y}{\partial t} dy + \frac{\partial v_z}{\partial t} dz \right) + \int_{AB} (v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z)$$

Merkitään x-, y- ja z-akselien suuntaisia yksikkövektoreita i , j ja k , jolloin nopeusvektorille $\vec{v}$ saadaan lauseke:

$$\bar{v} = \bar{i}v_x + \bar{j}v_y + \bar{k}v_z$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \bar{i} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \bar{j} \frac{\partial v_y}{\partial t} + \bar{k} \frac{\partial v_z}{\partial t} \\ d\bar{s} = \bar{i}dx + \bar{j}dy + \bar{k}dz \end{cases}$$

$$\left(\frac{d\bar{v}}{dt} d\bar{s}\right) = \frac{\partial v_x}{\partial t} dx + \frac{\partial v_y}{\partial t} dy + \frac{\partial v_z}{\partial t} dz$$

Näin ollen päästään muotoon

$$(g) \quad \int_{AB} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} d\bar{s}\right) + \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \int_{AB} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} d\bar{s}\right) + \frac{1}{2} v^2$$

Yhtälöiden (c) ja (g) nojalla saadaan Bernoullin yhtälön yleinen muoto

$$\boxed{\int_{AB} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} d\bar{s}\right) + \frac{1}{2} v^2 + U + \int_{AB} \frac{dp}{\rho} = C} \quad (20)$$

Yleisen Bernoullin käyttö on käytännön tarpeisiin peräti harvinaista; yleensä tarkastellaan tapausta, jossa virtaus on stationääristä, jolloin $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0$, neste on kokoonpuristumatonta, jolloin ρ on vakio ja potentiaalifunktio on maan vetovoimakentän aiheuttama, jolloin

$$Z = - \frac{\partial U}{\partial z} = - g$$

$$\therefore U = gz$$

Kun nämä tiedot asetetaan yleiseen yhtälöön ja jaetaan g :llä sekä muistetaan, että $\gamma = g \cdot \rho$, niin saadaan

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} = \text{VAKIO} = H$$

(21)

Eri termien merkitykset ovat seuraavat

$\frac{v^2}{2g}$ = nopeuskorkeus

z = asemakorkeus

$\frac{p}{\gamma}$ = painekorkeus

H = energiakorkeus (hydraulinen korkeus)

Kun tarkastellaan olosuhteita kahdessa eri pisteessä, kirjoitetaan yhtälö muotoon

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \quad (22)$$

Mikäli $z_1 = z_2$ ja nopeus kasvaa, on paineen pienennyttävä ja päinvastoin. Käytännössä oletetaan, että H on vakio koko virtausalueella eikä vain yhdellä virtaviivalla.

Esimerkki: Tarkastellaan vaakasuoraa putkea, jossa virtaa ideaalista nestettä.



$$A_1 = 12 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 6 \text{ cm}^2$$

$$v_1 = 8 \text{ cm/s}$$

Laske paine-ero!

Jatkuvuusyhtälö $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1$

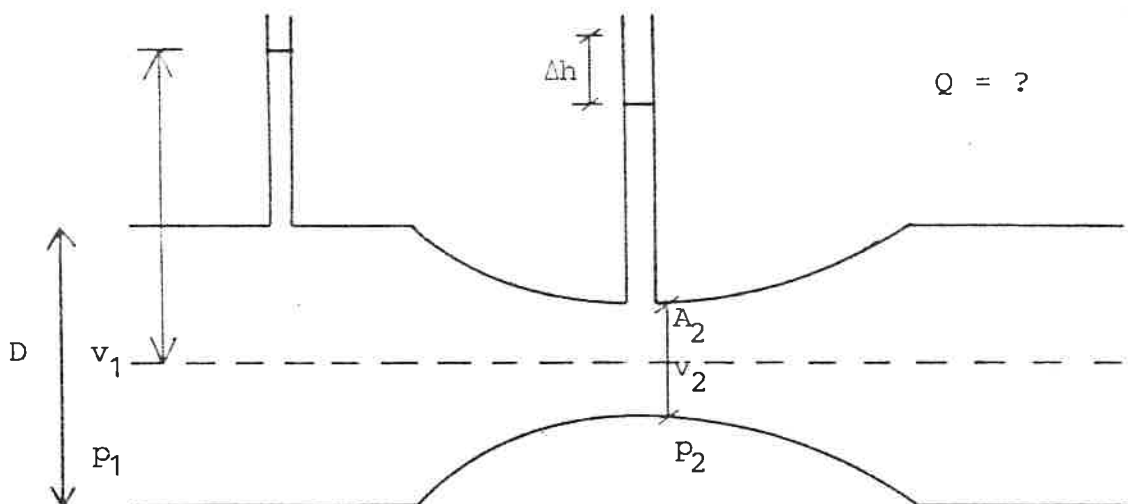
$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$p_1 - p_2 = \gamma \left(z_2 - z_1 + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} \right) ; z_1 = z_2$$

$$= \frac{\gamma v_1^2}{2g} \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]$$

$$= 9,6 \text{ N/m}^2$$

Esimerkki: Venturi-mittari. Oikein muotoillussa putkessa kitkahäviöt ovat pienet.



$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_1 + \frac{v_2^2}{2g} ; z_1 = z_2$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \Delta h$$

$$\text{Koska } v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$$

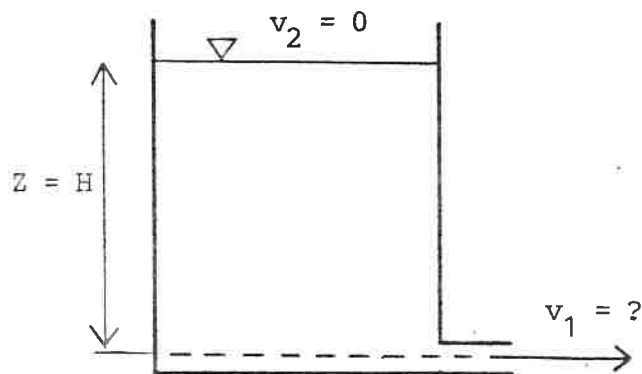
$$\Delta h = \frac{v_2^2}{2g} \left(1 - \frac{v_1^2}{v_2^2} \right)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{\Delta h \cdot 2g}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

$$Q = v_2 \cdot A_2 = v_2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \dots \text{jne.}$$

Venturimittarin kehitti italialainen Venturi 1797.

Esimerkki: Toricellin laki.



$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_o}{\gamma} + 0 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_o}{\gamma} + H$$

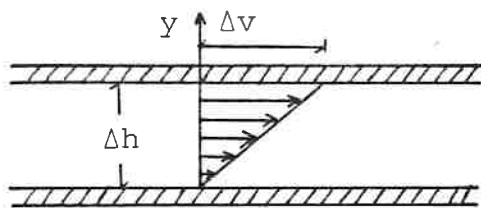
$$\underline{v_1 = \sqrt{2gH}}$$

4.8 Kitkan vaikutus

Kaikessa liikkeessä syntyy kitkaa, ts. aktiivisesti vaikuttavat voimat herättävät passiivivoimia, kitkavoimia. Näitä voimia esiintyy kaikkialla, missä suhteellisia nopeuseroja esiintyy ja ne vaikuttavat pitkin liukupintoja. Kitkavoimat vastustavat liikettä ja aiheuttavat energiahäviöitä, pääasiassa muuttamalla mekaanista energiaa lämmöksi.

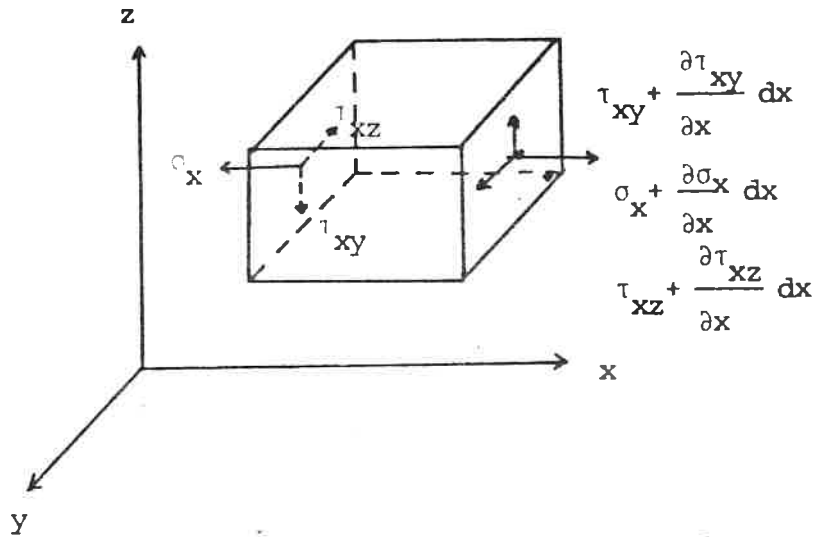
Veden liikkuesssa syntyy kahdenlaisia kitkavoimia 1. kitka nesteen ja rajoittavan astian tai uoman välillä ja 2. kitka eri nestepartikkelien ja nestekerrosten välillä. Nämä aiheuttavat energiahäviöitä. Kohdassa 2. mainittua kitkaa kutsutaan viskositeetiksi eli sisäiseksi kitkaksi. Yleisesti oletetaan, että se nestekerros, joka sijaitsee lähimpänä kiinteää seinämää, on täysin kiinnittynään seinään ja että tämän kerroksen nopeus on nolla.

Newton havaitsi, että sisäinen kitka on riippumaton normaali-paineesta, mutta verrannollinen liukuvien pintojen suuruuteen ja näiden väliseen etäisyyteen:



$$\frac{F}{A} = \eta \cdot \frac{\Delta v}{\Delta h} \Rightarrow \tau = \eta \frac{dv}{dy}$$

4.9 Nesteessä esiintyvät muutokset ja jännitykset



Samoin kuin kiinteiden kappaleiden tapauksessa voidaan normaalijännityksille kirjoittaa:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\eta \frac{\delta v_x}{\delta x} - \frac{2}{3} \eta \left[\frac{\delta v_x}{\delta x} + \frac{\delta v_y}{\delta y} + \frac{\delta v_z}{\delta z} \right] \\ \sigma_y &= -p + 2\eta \frac{\delta v_y}{\delta y} - \frac{2}{3} \eta \left[\frac{\delta v_x}{\delta x} + \frac{\delta v_y}{\delta y} + \frac{\delta v_z}{\delta z} \right] \\ \sigma_z &= -p + 2\eta \frac{\delta v_z}{\delta z} - \frac{2}{3} \eta \left[\frac{\delta v_x}{\delta x} + \frac{\delta v_y}{\delta y} + \frac{\delta v_z}{\delta z} \right] \end{aligned} \right. \quad (23)$$

= 0

Kokoonpuristumattomille nesteille voidaan yhtälöiden viimeinen termi asettaa = 0.

Kolmidimensionaalisessa tapauksessa saadaan leikkausjännityksille vastaavalla tavoin

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta \left(\frac{\delta v_x}{\delta x} + \frac{\delta v_y}{\delta y} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = \eta \left(\frac{\delta v_z}{\delta y} + \frac{\delta v_y}{\delta z} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = \eta \left(\frac{\delta v_z}{\delta x} + \frac{\delta v_x}{\delta z} \right) \end{cases} \quad (24)$$

Yhtälöistä käy ilmi, etteivät normaali-jännitykset ole paineen suuruisia, ellei viskositeetti ole nolla tai ellei neste ole levossa. Sen sijaan ideaalisille nesteille pätee:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p \\ \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \end{cases}$$

4.10 Navier-Stokesin yhtälöt

Sovelletaan Newtonin II lakia pieneen neste-elementtiin $dx \cdot dy \cdot dz = dV$. Oletetaan, että gravitaatiovoima on ainoa vaikuttava massavoima.

Jos h :lla merkitään tietyn pisteen korkeusasemaa tietyn vertailutasen yläpuolella, saadaan painovoiman komponenteiksi x -, y -, ja z -suunnassa

$$X = - \rho g \frac{\delta h}{\delta x} dx \cdot dy \cdot dz$$

$$Y = - \rho g \frac{\delta h}{\delta y} dx \cdot dy \cdot dz$$

$$Z = - \rho \frac{\delta h}{\delta z} dx \cdot dy \cdot dz$$

Jos nyt koordinaattiakselisto asetetaan siten, että h ja z tulevat yhdensuuntaisiksi, niin $X = Y = 0$

$$Z = - \rho \cdot g \cdot dx \cdot dy \cdot dz = - \rho \cdot g \cdot dV$$

Kun voimakomponentit lasketaan esimerkiksi x-suunnassa yhteen ja jaetaan elementin massalla, niin kiihtyvyydeksi x-suunnassa saadaan:

$$\frac{dv_x}{dt} = - g \frac{\delta h}{\delta x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{yx}}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta z} \right)$$

Vastaavalla tavalla saadaan kiihtyvyydet muissa akselisuunnissa. Mikäli neste on kokoonpuristumatonta, saadaan, sijoittamalla edellä johdetut lausekkeet, Navier-Stokesin yhtälöt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta v_x}{\delta t} + v_x \frac{\delta v_x}{\delta x} + v_y \frac{\delta v_x}{\delta y} + v_z \frac{\delta v_x}{\delta z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\delta}{\delta x} (p + \gamma h) + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 v_x \\ \frac{\delta v_y}{\delta t} + v_x \frac{\delta v_y}{\delta x} + v_y \frac{\delta v_y}{\delta y} + v_z \frac{\delta v_y}{\delta z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\delta}{\delta y} (p + \gamma h) + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 v_y \\ \frac{\delta v_z}{\delta t} + v_x \frac{\delta v_z}{\delta x} + v_y \frac{\delta v_z}{\delta y} + v_z \frac{\delta v_z}{\delta z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\delta}{\delta z} (p + \gamma h) + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 v_z \end{array} \right. \quad (25)$$

$$(\nabla^2 v = \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta z^2}) \quad (26)$$

Yhtälöt sisältävät neljä tuntematonta v_x , v_y , v_z ja p .

h voidaan lausua x :n, y :n ja z :n avulla. Yhdessä jatkuvuusyhtälön kanssa muodostuu neljä yhtälöä, joten periaatteessa tuntemattomat saadaan ratkaistuksi. Koska osittaisdifferentiaaliyhtälöt ovat epälineaarisia ja toista astetta, on yleisen ratkaisun hakeminen mahdotonta.

Navier-Stokesin yhtälöt soveltuvat sekä laminaarisen että turbulenttisen virtauksen kuvaamiseen. Turbulenttisessa virtauksessa ne pätevät hetkellisille nopeusarvoille. Niitä käyttäen ei ole mahdollista saada tarvittavia hydrodynaamisia lähtöarvoja. Monessa tapauksessa onkin osoittautunut taroituksenmukaiseksi käyttää turbulenssia kuvaavien suureiden keskiarvoja. Näitä käyttämällä päädytään ns. Reynoldsin yhtälöihin, jotka tässä kuitenkin sivuutetaan.

4.11 Kitkan vaikutus Bernoullin yhtälöön

Edellä osoitettiin, että ideaalisen nesteen virtauksessa pätee jokaista virtaviivaa pitkin tai jokaisessa virtaputkessa

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} = \text{vakio} \quad (21)$$

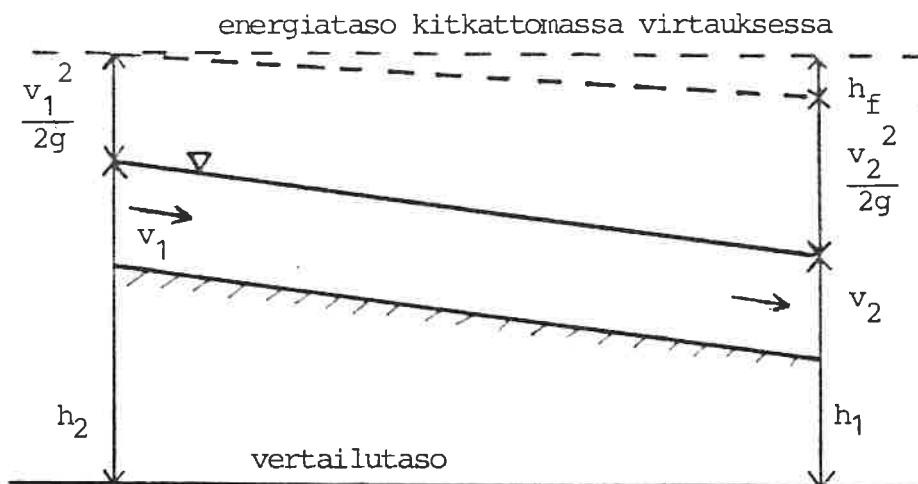
ts. että tilavuusyksikköön liittyvä energiasumma on vakio. Kokeellisesti on kuitenkin helppo osoittaa, että energia-

summa virtaussuunnassa vähenee. Bernoullin yhtälön oikea puoli on siten aina pienempi kuin vasen puoli. Tästä syystä oikealle puolelle on lisättävä termi, joka ottaa huomioon viskositeetin aiheuttaman energiahäviön. Tavallisesti kirjoitetaan Bernoullin yhtälö muotoon:

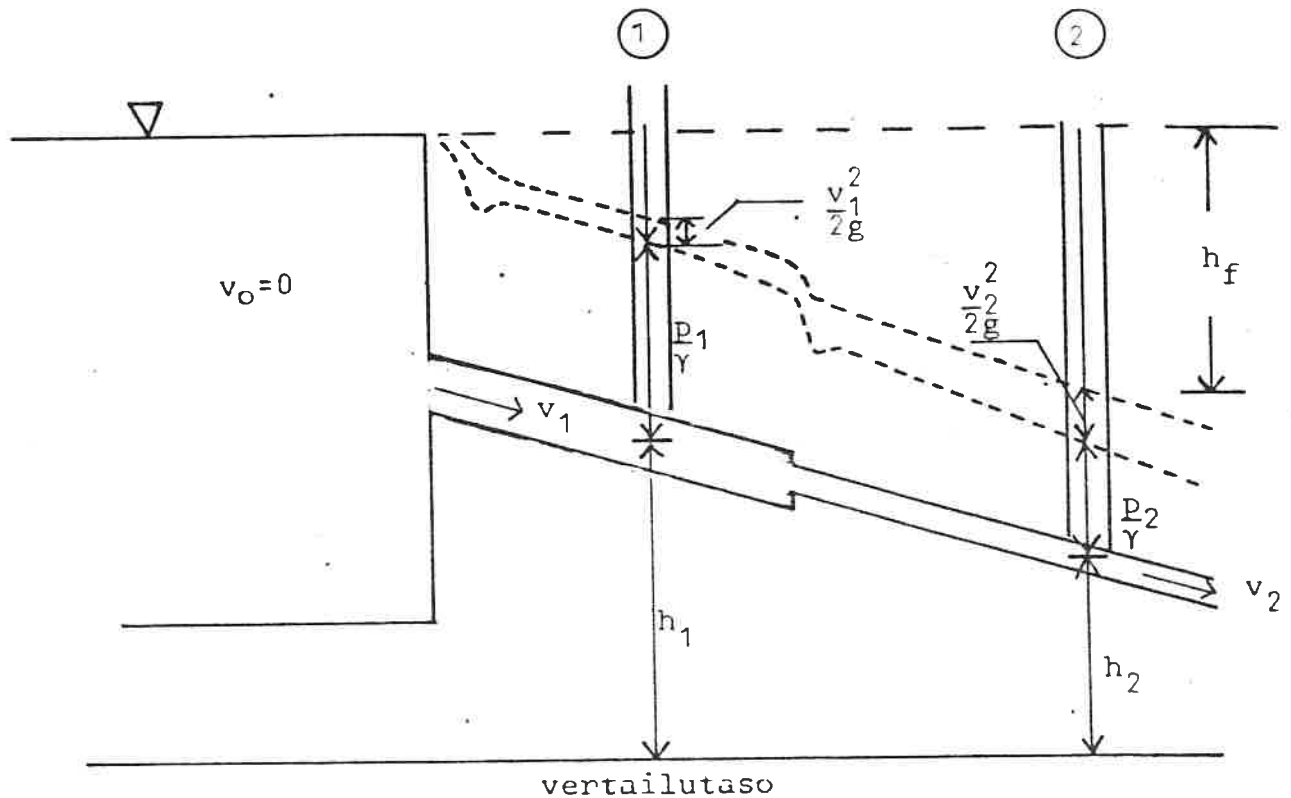
$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_f \quad (27)$$

Tekniikassa on merkittävintä tuntea tai pystyä laskemaan h_f :n suuruus. Voidaan sanoa, että hydrauliikan tärkein tehtävä on ollut ja on löytää luotettavat arvot häviötermille h_f .

Jos Bernoullin yhtälöön halutaan vielä totuuden mukaisuutta, tulisi nopeuden epätasainen jakautuminen ottaa huomioon kertomalla termit $v^2/2g$ kertoimella, joka avouomissa on 1,1...1,2. Putkivirtauksessa voidaan käyttää kerrointa 1,0.



$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + h_f$$



$$h_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_f$$

4.12 Impulssilause

Bernoullin yhtälöä käytettäessä on tunnettava energiahäviö tarkasteltavien poikkileikkausten välillä. Ilmeisesti sellaisella ratkaisutavalla, jossa energiahäviöiden suuruutta ei tarvitse tuntea, olisi monissa tapauksissa merkitystä.

Nestemassalla, jonka tilavuus on V , tiheys ρ ja massa näin ollen $m = \rho \cdot V$, on nopeus $\bar{v}$ ja siihen vaikuttaa massavoimia ja pintavoimia, joiden resultantti on $\bar{F}$. Newtonin toisen lain mukaan

$$\bar{F} = m \cdot \frac{d\bar{v}}{dt}$$

joka voidaan muuttaa muotoon

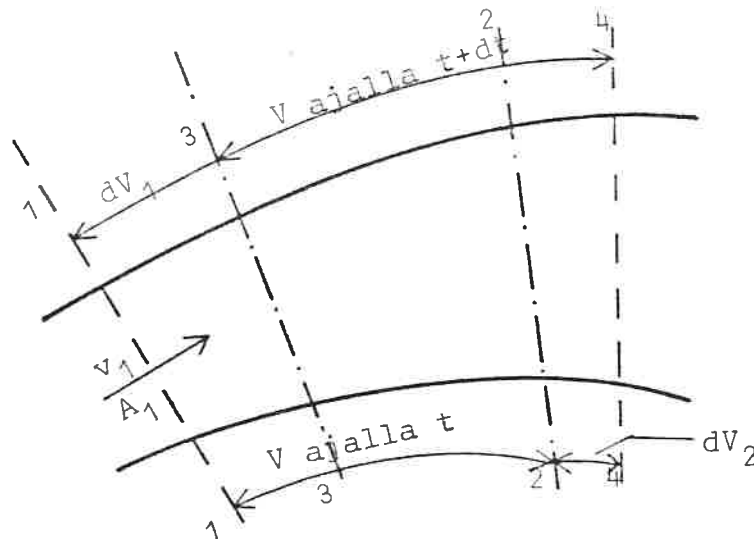
$$\bar{F} \cdot dt = m \cdot d\bar{v} \quad (28)$$

Sanoin ilmaistuna voiman impulssi (ts. $\bar{F}$:n ja aikajakson dt tulo) on yhtä suuri kuin liikemäärän tulo. Tätä lausetta kutsutaan impulssilauseeksi.

Jos liikemäärää merkitään B :llä, saadaan

$$\bar{F} \cdot dt = d\bar{B}$$

$$\text{tai } \bar{F} = \frac{d\bar{B}}{dt}$$



Stationäärisessä virtauksessa tarkastellaan sitä nestetilavuutta V , jota mielivaltaisella ajanhetkellä t rajoittaa virtaputki ja poikkileikkaukset 1-1 ja 2-2. Poikkileikkaukset ovat kohtisuorassa tätä virtaputkea vastaan. Nestetilavuus kulkee pitkin virtaputkea ja on aikavälin dt kulluttua välillä 3-3 ja 4-4. Poikkileikkauksessa 1-1 on nesteen nopeus $\bar{v}_1$ ja virtaputken ala A_1 . Poikkileikkauksessa 2-2 on nopeus $\bar{v}_2$ ja ala A_2 .

Sikä ajanhetkellä t että $t + dt$ on tilavuus poikkileikkausten 3-3 ja 2-2 välillä pysynyt samana. Kokonaistilavuus on vähentynyt dV_1 :llä ja lisääntynyt dV_2 :lla. Liikemäärän muutos dB nestetilavuudessa V on sentähden sama kuin liikemäärä dB_2 nestetilavuudessa dV_2 poikkileikkausten 2-2 ja 4-4 välillä miinus liikemäärä dB_1 nestetilavuudessa dV_1 leikkausten 1-1 ja 3-3 välillä

$$(a) \quad d\bar{B} = d\bar{B}_2 - d\bar{B}_1$$

Virtaama virtaputkessa on

$$[Q = A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2]$$

Silloin on $dV_1 = dV_2 = Q \cdot dt$ ja liikemäärät ovat:

$$\left. \begin{aligned} d\bar{B}_1 &= \bar{v}_1 \cdot \rho \cdot Q \cdot dt \\ d\bar{B}_2 &= \bar{v}_2 \cdot \rho \cdot Q \cdot dt \end{aligned} \right\}$$

Nämä yhtälöt sijoitettuna yhtälöön (a) antavat liikemäärän muutoksen aikayksikössä nestetilavuudelle V

$$\frac{d\bar{B}}{dt} = \rho \cdot Q(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)$$

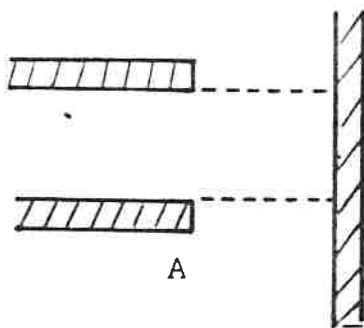
Kun muistetaan, että $\bar{F} = \frac{d\bar{B}}{dt}$ (kts. edellä), niin

$$\bar{F} = \rho \cdot Q(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \quad (29)$$

Yhtälö on vektoriyhtälö. Se ei sovellu ainoastaan määrätylle siirtyvälle nesteosalle, vaan sitä voidaan myös käyttää leikkausten 1-1 ja 2-2 väliin virtaavalle nestemäärälle Q.

Impulssilauseen etu on, että sitä käytettäessä ei tarvitse tuntea jakson sisällä tapahtuvia energiamuutoksia, vaan ulkoisten voimien tunteminen riittää.

Esimerkki: Vesisuihku seinää vasten



v_1 = suihkun tulonopeus

v_2 = suihkun nopeus seinässä
(= 0)

$$F = \rho \cdot Q(v_2 - v_1)$$

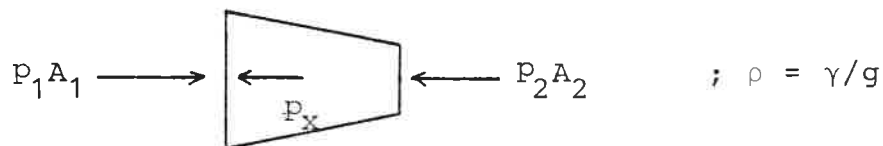
$$Q = A \cdot v_1, \quad \rho = \gamma/g$$

$$F = \frac{\gamma \cdot A \cdot v_1^2}{g} = 2\gamma \cdot A \cdot \frac{v_1^2}{2g}$$

$$Q = \frac{\pi \cdot 0.075^2}{4} \cdot 4.51 = 0.0199 \text{ m}^3/\text{s}$$

II Voima impulssisäännön nojalla

$$F = \rho \cdot Q(v_2 - v_1)$$



$$P_1 A_1 - P_x = \rho \cdot Q(40.56 - 4.51) ;$$

$$P_x = 69 \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi \cdot 0.075^2}{4} - \frac{8\,330}{9.81} \cdot 0.0199 (40.56 - 4.51)$$

$$\underline{\underline{P_x = 2\,439 \text{ N}}}$$

4.13 Reynoldsin luku

Nesteen nopeutta lisättäessä muuttuu virtaustila laminaarisesta turbulenttiseksi. Tietyn kriittisen nopeuden alapuolella virtaus on aina laminaarista (alempi kriittinen nopeus). Tämän jälkeen siirrytään välivyöhykkeeseen, jossa esiintyy joko laminaarista tai turbulenttista virtausta. Ylemmän kriittisen nopeuden yläpuolella virtaus on aina turbulenttista.

Osborne Reynolds (1883) oli ensimmäinen, joka teki sekä teoreettisia että kokeellisia selvityksiä turbulenssista ja hän havaitsi, että virtaustila putkessa riippui paitsi nopeudesta, niin myös putken halkaisijasta ja kinemaattisesta viskositeetista. Virtaustilan ilmaiseekin ns. Reynoldsin luku

$$Re = \frac{v \cdot D}{\nu} \quad (30)$$

v = nopeus

D = putken halkaisija

ν = kinemaattinen viskositeetti

Pyöreillä metalliputkillla Re kriittillinen on noin 2 000 ja tiili- ja betoniputkillla noin 1 200.

Avouomissa ja muissa kuin ympyränmuotoisissa putkissa virtaustilaa luonnehtiva luku on muodossa

$$Re = \frac{v \cdot 4R}{\nu}$$

$$R = \frac{A}{p} = \frac{\text{poikkipinta}}{\text{märkäpiiri}}$$

Avouomissa ja putkijohdoissa virtaus on yleensä turbulenttista. Maa- ja pohjavesien virtaus on laminaarista.

5. PUTKIVIRTAUS

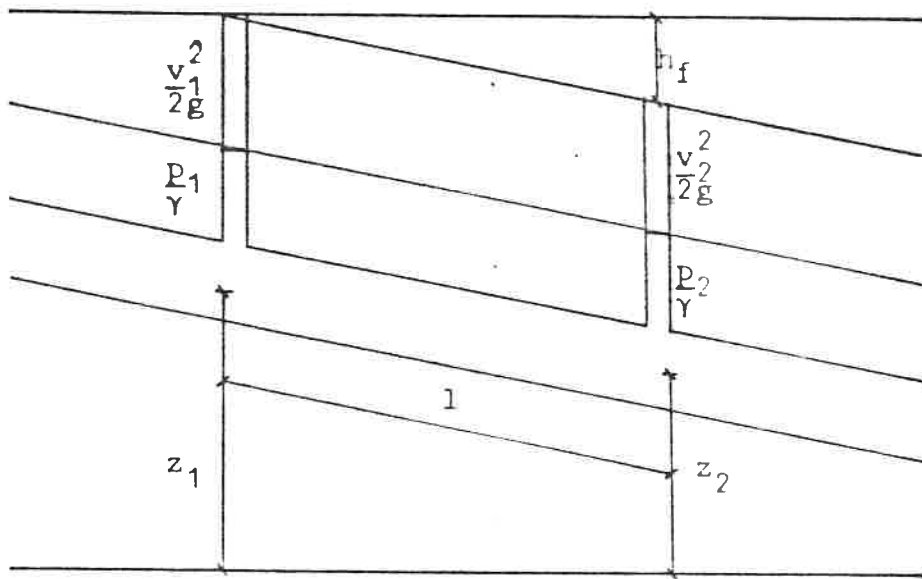
5.1 Yleisiä näkökohtia

Nykyaikainen yhdyskuntarakenne edellyttää erilaisten putkiverkostojen rakentamista. Vesijohtoverkkojen avulla huolehditaan käyttöveden toimittamisesta kuluttajille, viemäriverkostojen avulla kuljetetaan puolestaan käytöstä poistettu vesi purkualueille. Korkealuokkaisen raakaveden saamiseksi on mm. Helsingin kaupunki rakennuttanut 1960-luvulla ns. Hiidenvesitunnelin ja parhaillaan rakennetaan raakavesitunnelia Päijänteeltä Helsinkiin. Uudenmaan jätevedet kootaan 1980-luvulla tunneliin, josta ne puretaan Suomenlahteen. Vastaavanlaisina esimerkkeinä käyvät Turun vedenhankintahanke Säkylän Pyhäjärvestä sekä Kymenlaakson keskitetyksi suunniteltu vedenhankinta Vuohijärvestä (ns. Selänpää-suunnitelma).

Suomalainen yhteiskunta uhraa vuosittain satoja miljoonia markkoja vedenkuljetukseen tarkoitettujen putkiverkostojen rakentamiseen. Putkistojen mitoitus on näin ollen taloudellisesti suhteellisen merkittävä kysymys ja optimaaliseen mitoitukseen on syytä pyrkiä. Seuraavassa esitellään stationäärisen putkivirtauksen laskemiseksi tarvittavia perustietoja.

5.2 Kitkahäviö putkessa

Tarkastellaan tasaista virtausta putkessa



$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + h_f$$

Tasaisessa virtauksessa $v_1 = v_2$, joten

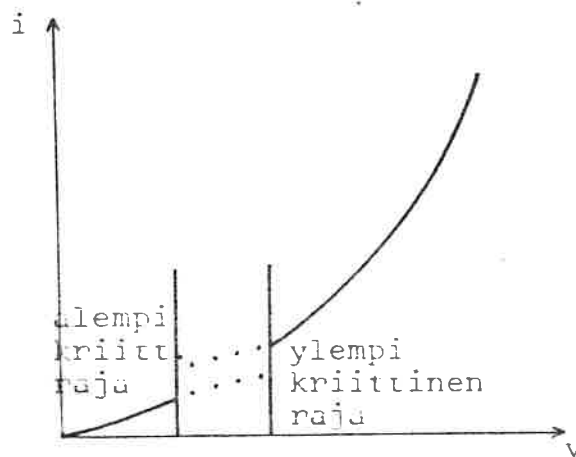
$$h_f = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + z_1 - z_2$$

$$i = \frac{h_f}{l} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma \cdot l} + \frac{z_1 - z_2}{l}$$

Energiaviivan kaltevuus on yhdistelmä paineviivan kaltevuudesta $(p_1 - p_2)/(\gamma \cdot l)$ ja johdon kaltevuudesta $(z_1 - z_2)/l$. Horisontaalisuuntaisessa putkessa paineviivan ja energiaviivan kaltevuus ovat samat.

Kokeellisesti on todettu, että laminaarivirtauksessa $i = k \cdot v$ eli että kaltevuus on suoraan verrannollinen nopeuteen.

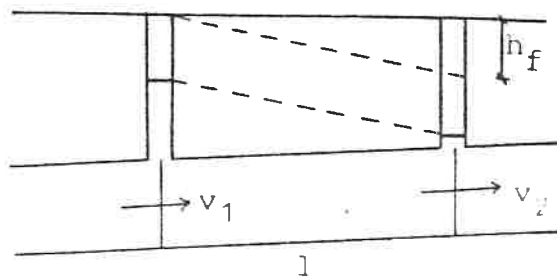
Turbulenttisisä virtauksessa $i = k \cdot v^n$ $n \approx 1.8 \dots 2.0$ riippuen seinämän ominaisuudesta.



Yleensä on todettavissa, että kitkavoima on

- 1) riippumaton paineesta p
- 2) suoraan verrannollinen nestettä rajoittavaan pintaan.
(märkäpiiri p' ja pituus (l))
- 3) verrannollinen keskimääräiseen virtausnopeuteen v jollakin tavoin. Ts. kitkavoima on virtausnopeuden funktio $f(v)$.

Johdetaan seuraavaksi yleinen yhteys energiahäviön ja keskinopeuden v välille, kun tarkastelun kohteena on stationäärinen, tasainen viskoosin nesteen virtaus putkessa, jonka halkaisija on d ja energiaviivan kaltevuus i . Mikäli nesteen ominaispaino on γ , saadaan (hydrostaattista painetta tarkastelemalla) nestettä eteenpäin vieväksi voimaksi F ;



$$v_1 = v_2$$

$$F = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot \gamma \cdot h_f \quad (a)$$

Koska kiihtyvyyttä ei esiinny, on kitkavoiman F' pidettävä tämä voima tasapainossa. F' oletetaan funktioksi nopeuskorkeudesta $\frac{v^2}{2g}$ (jossa v = keskinopeus), nesteen ominaispainosta ja putkipinnan alasta. Siis

$$F' = \psi \cdot \pi \cdot d \cdot \gamma \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot l \quad (b)$$

jossa ψ on dimensioton vakio. Asetetaan yhtälöt (a) ja (b) yhtä suuriksi, jolloin saadaan

$$\pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot \gamma \cdot h_f = \psi \cdot \pi \cdot d \cdot \gamma \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot l$$

joten

$$h_f = 4\psi \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

Kun merkitään $4\psi = f$, saadaan lopuksi

$$h_f = f \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (31)$$

Tämä muoto on suosittu USA:ssa ja Mannereuroopassa. Englannissa edellinen muoto on käytetympi.

Yhtälöä nimitetään Darcy'n tai Weisbach'in yhtälöksi.

Kitkakertoimen f on havaittu riippuvan Reynoldsin luvusta Re , ts.

$$f = \phi(Re)$$

Laminaarisessa virtauksessa ko. riippuvuus saadaan analyytisesti. Turbulenttisessa virtauksessa näin ei sensijaan voida tehdä, vaan joudutaan tyytymään erilaisiin kokemusperäisesti saatuihin nomogrammeihin.

5.2.1 Kitkahäviö laminaarisessa virtauksessa

Tarkastellaan laminaaria, stationääristä virtaustilannetta putkessa A , jossa energiaviivan kaltevuus on i . Tarkastellaan nesteen sisällä sylinteriä, jonka säde on x ja pituus l .

Tasapainoehto

$$dp \cdot \pi \cdot r^2 = -2\pi \cdot x \cdot l \frac{dv}{dx} \cdot \eta, \text{ josta}$$

$$dv = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot x \cdot dx$$

Kun huomataan, että $dp = \overbrace{\rho \cdot g}^{\gamma} \cdot h_f$ ja $h_f/l = i =$ energia-
viivan kaltevuus, niin

$$dv = \frac{1}{2\eta} \cdot \gamma \cdot i \cdot x \cdot dx$$

Integroimalla saadaan

$$v = - \frac{\gamma \cdot i}{4\eta} x^2 + C$$

Putken reunalla $v = 0$, jolloin $x = r$ antaa C:lle arvon

$$C = \frac{\gamma \cdot i}{4\eta} r^2$$

Joten

$$v = \frac{\gamma \cdot i}{4\eta} (r^2 - x^2) \quad (32)$$

Havaitaan, että nopeus on parabolisesti jakautunut akselin ympärillä.

Virtaama aikayksikössä voidaan laskea, kun nopeusjakautuma tunnetaan. Tarkastellaan rengasta, jonka paksuus on dx ja etäisyys x keskiakselista. Renkaan läpi virtaava vesimäärä on dq_x

$$dq_x = 2\pi x \cdot dx \cdot v = \frac{\pi \cdot \gamma \cdot i}{2\eta} (r^2 x - x^3) dx$$

Integroimalla saadaan

$$q_x = \frac{\pi \cdot i \cdot \gamma}{2\eta} \left(\frac{r^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) + C$$

Kun $x = 0$, täytyy q_x :n olla nolla ($=0$), jolloin $C = 0$.

Asettamalla $x = r$ saadaan kokonaisvesimääräksi

$$q = \frac{\pi \cdot \gamma \cdot i \cdot r^4}{8\eta} \quad (33)$$

Yhtälöä kutsutaan Hagen-Poiseuille - yhtälöksi (1840). Ko-
keellisilla tutkimuksilla on osoitettu, että teoreettisesti
johdettu laki pätee.

Jos v_m on keskinopeus, niin

$$q = \pi r^2 \cdot v_m = \frac{\pi \cdot \gamma \cdot i \cdot r^4}{8\eta} \Rightarrow$$

$$v_m = \frac{\gamma \cdot i \cdot r^2}{8\eta} = \frac{\rho \cdot g \cdot d^2}{32\eta} \cdot i$$

Huomaa, että tätäkin tietä

$$i = \frac{8\eta}{\gamma \cdot r^2} \cdot v = \text{vakio} \cdot v \quad (34)$$

Kitkahäviöyhtälön yleinen muoto saatiin edellä seuraavaksi:

$$(a) \quad h_f = f \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

Hagen-Poiseuille:

$$i = \frac{8\eta}{\gamma \cdot r^2} \cdot v = \frac{8 \cdot \rho \cdot \nu}{\gamma \cdot r^2} \cdot v = \frac{8\nu}{gr^2} \cdot v = \frac{64\nu}{d^2} \cdot \frac{v}{2g}$$

$$h_f = i \cdot l \Rightarrow$$

$$(b) \quad h_f = \frac{64}{\frac{v \cdot d}{\nu}} \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

Yhtälön (a) ja (b) perusteella havaitaan, että laminaarivirtauksessa:

$$f = \frac{64}{\frac{v \cdot d}{\nu}} = \frac{64}{Re} \quad (35)$$

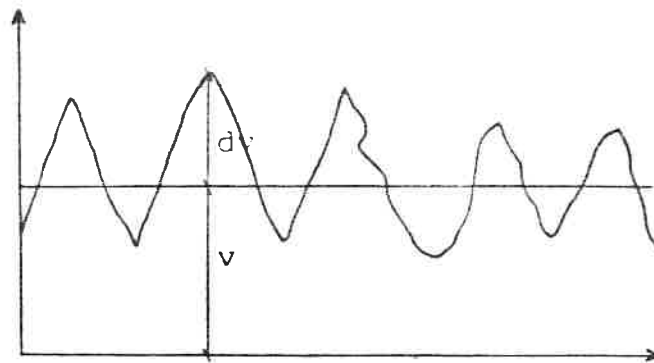
Laminaarivirtauksessa saadaan siis analyyttinen lauseke f :lle. Hagen-Poiseuillen laki tarjoaa erinomaisen mahdollisuuden ν :n määrittämiseen. Tällä lailla pitäisi olla mahdollisuuksia nimenomaan maavesien virtauksia tutkittaessa.

5.2.2 Kitkahäviö turbulenttisessa virtauksessa

Laminaarivirtauksen tutkiminen on varsin helppoa verrattuna turbulenttiseen liikkeeseen. Turbulenttisessa liikkeessä ei voida ollenkaan helposti saada lauseketta nopeusjakautumalle, koska on erikoisen vaikeata löytää ilmaisuja leikkausjännityksille. Näinollen joudutaan f :lle hakemaan arvoa kokeellisesti. Tarkastellaan aluksi nopeusjakautumaa putkessa.

Nopeusjakautuma

Turbulentissa virtauksessa esiintyy vaihtelevia nopeusgradientteja sekä pitkittäis- että sivusuunnassa. Näiden keskiarvo on kuitenkin nolla.



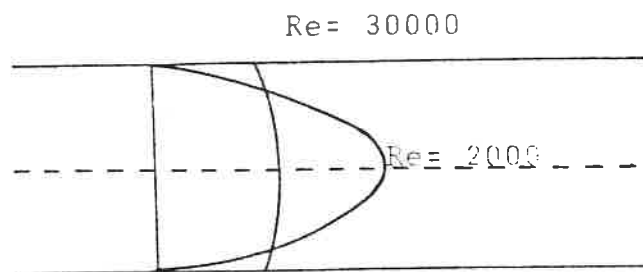
Tästä huolimatta vaihtelut merkitsevät lisääntyviä (merkittävästi) leikkausjännityksiä nesteessä ja näinollen energiahäviöitä. Kun laminaarivirtauksessa nestekerrokset ikäänkuin liukuvat toistensa päällä, esiintyy turbulenssivirtauksessa jatkuvaa massanvaihtoa.

Turbulenssivirtauksessa nopeusjakautuma on tasaantunut.
Kun laminaarivirtauksessa

$$\frac{v_m}{v_{\max}} = 0.5 ,$$

niin täysin kehittyneessä turbulenssissa tämä suhde on

$$\frac{v_m}{v_{\max}} = 0.80 \dots 0.85$$



Suhde kasvaa Reynoldsin luvun kasvaessa. Turbulenssivirtauksessakin lähdetään siitä, että välittömästi seinämän lähellä on laminaarinen rajakerros ja putken seinässä nopeus on nolla. Laminaarinen rajakerros kasvaa nopeuden pienentyessä.

Prandtl ja V. Kármán esittivät ns. $\frac{1}{7}$ - lain nopeuden jakautumiselle sileässä putkessa

$$v = v_{\max} \left(\frac{x}{r} \right)^{1/7} \quad \text{Re} < 10^5 \quad (36)$$

x = etäisyys seinämästä

r = putken säde

Yleisesti $v = v_{\max} \left(\frac{x}{r}\right)^n$

n riippuu putken karkeudesta.

Sileä alue, karkea alue, siirtymäalue

Kitkahäviöiden merkittäviä tutkijoita ovat olleet Blasius, Prandtl, Nikuradse ja v. Kármán.

Sileällä putkella on saatu f :lle lausekkeet

Blasius (1913)

$$f = \frac{0.316}{\sqrt[4]{Re}}, \quad 4\,000 < Re < 100\,000 \quad (37)$$

Prandtl sai teoreettista tietä yhteyden

$$f = \frac{1}{[2 \log(Re \sqrt{f}) - 0.8]^2}, \quad Re < 3.4 \cdot 10^6 \quad (38)$$

Hermann (1930)

$$f = 0.0054 + 0.396 \cdot Re^{-0.3}, \quad R < 1.5 \cdot 10^6 \quad (39)$$

Pinnan sileys ja karkeus määräytyy siitä, missä määrin ja millaisia ovat putken seinämän epätasaisuudet. Pinnan epä-säännöllistä tehokasta korkeutta kutsutaan karkeuskorkeudeksi k . Suhde k/R on nimeltään suhteellinen karkeus. R on hydraulinen säde. Putkijohdossa suhteellinen karkeus on

$$\xi = \frac{k}{d} \quad (40)$$

Karkeuskorkeus on eräs mitta, joka ei ole välttämättä karkeuden todellinen tai keskimääräinen korkeus. Esimerkiksi kahdella pinnan karkeudella voi olla erilainen korkeus, mutta karkeuksien muoto ja sijainti voivat saada aikaan samanlaisen karkeusvaikutuksen, jolloin niiden karkeutta kuvataan samalla karkeuskertoimella.

Erilaisten pintojen karkeuskorkeus voidaan määrittää kokeilla.

Putkien epätasaisuuksia on kahta tyyppiä. Voidaan erottaa aaltomaisia epätasaisuuksia, joiden syvyys on pieni niiden pituuteen verrattuna. Tällaista epätasaisuutta nimitetään seinän aaltoisuudeksi, mutta putkea voidaan silti pitää tasaisena. Milloin epätasaisuuden syvyys sen pituuteen verrattuna on taas suhteellisen suuri, puhutaan seinän karkeudesta.

Kokemusperäisesti on todettu, että virtaamisvastus ensisijassa on riippuvainen siitä, onko kyseessä laminaari- vai turbulenssivirtaus, mutta myös putken seinämän laadusta.

1. Jos virtaustapa on laminaarinen, on putken seinän lähellä oleva rajakerros siksi paksu, ettei seinämän aaltoisuudella enempää kuin karkeudellakaan ole vastukseen mitään vaikutusta. Vastuskerroin on tällöin

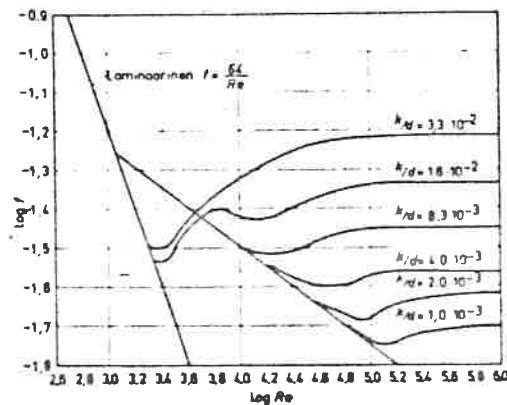
$$f = \frac{64}{Re}$$

2. Kun $Re > 2\,300$, on virtaamistapahtuma aina turbulентtinen. Tällöin on rajakerros huomattavasti ohentunut ja seinän

laatu pääsee vaikuttamaan putkessa syntyvään virtausvastukseen. Jos Re on suhteellisen alhainen, vaikuttaa $Re:n$ ohella $f:n$ suuruuteen vain seinämän aaltoisuus. Nikuradse (1932) sai sileissä ja aaltoisissa putkissa seuraavan yhteyden

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.80 + 2.0 \log \left(\frac{Re}{\omega} \cdot \sqrt{f} \right) \quad (41)$$

ω = aaltoisuusluku = aallonkorkeus/aallonpituus ,
sileissä putkissa $\omega = 1$.



3. Jos vihdoin seinän epätasaisuudet pääsevät vaikuttamaan, on f Reynoldsin luvun ja suhteellisen karkeuden funktio. Prandtlin mukaan on voimassa (Nikuradsen kokeet)

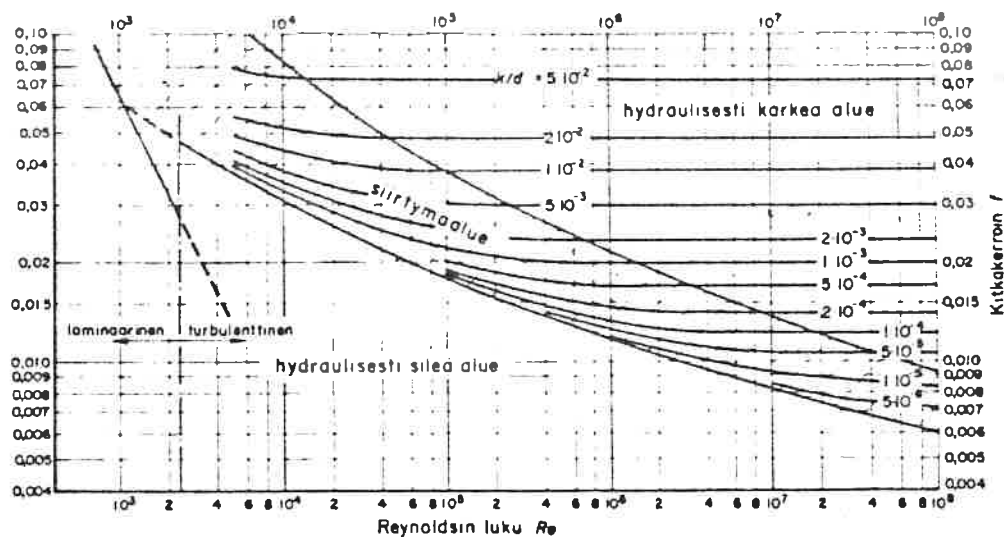
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left(\frac{d}{k} \right) + 1.14 \quad (42)$$

Huomataan, että suuria karkeuksia esittävät suorat eroavat suhteellisen pian sileiden putkien suorista ja muuttuvat suurilla Re :n arvoilla miltei vaakasuoriksi viivoiksi. Tällöin Re ei enää vaikuta.

Kokemus on osoittanut, että pyöreillä putkilla tehtyjä kokeita voidaan tyydyttävästi soveltaa myös mielivaltaisen poikkileikkauksen omaaville putkille.

Nikuradsenin harpusta voidaan erottaa sileä alue, siirtymä-alue ja karkea alue.

Colebrook (1939) on johtanut koko turbulenttisessa alueessa pätevän lausekkeen. Colebrook huomasi, että siirtymäalue oli erilaisia ilmenemismuotoja riippuen seinän karkeudesta.



Colebrookin ja Whiten mukaan karkean ja siirtymäalueen välillä on voimassa yhteys

$$Re = \frac{200}{\sqrt{f}} \cdot \frac{k}{d} \quad (43)$$

Siirtymäalueella pätee

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{k/d}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right) \quad (44)$$

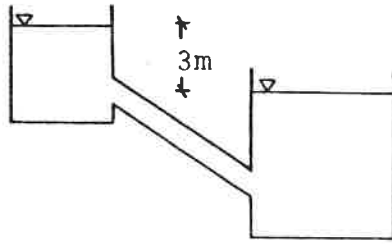
Kaavoissa log tarkoittavat kymmenlogaritmeja

Colebrookin ja Nikuradsenin kokeissa oli se ero, että ensinmainittu tarkasteli luonnollista karkeutta, viimeainittu hiekkajyväsillä karkeutettuja putkia.

k:n suuruudesta erilaisilla pinnoilla antanee kuvan seuraava taulukko

	k (mm)
lasi, kupari, messinkiputki	0 - 0.02
vedetty teräsputki, uusi	0.02 - 0.05
galvanoitu "	0.1 - 1.0
valurautaputki	0.3 - 2.0
ruostunut teräsputki	0.5 - 3.0
betoniputki	1.5
puuputki	0.3 - 1.0
tunneli	100 - 500

Esimerkki: Putken kitkahäviökerroin halutaan määrittää kokeellisesti. Tehdään seuraava järjestely:



Putki on 200 m pitkä ja 10 minuutin aikana vettä juoksee 5 000 l. Putken halkaisija on 100 mm:

$$3 = f \frac{200}{0.1} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad \text{yleinen kitkahäviö}$$

$$5 = \pi \frac{0.1^2}{4} \cdot v \cdot 10 \cdot 60 \quad \text{jatkuvuusyhtälö}$$

Jälkimmäisestä saadaan $v = \frac{10}{3\pi}$, joka sijoitetaan ja saadaan

$$\underline{\underline{f = 0.0262}}$$

Edellä esitetty on osoittautunut siksi huonosti vastaanotettavaksi tiedoksi, että käytännön laskutehtävät suoritetaan varsin usein käyttäen ns. eksponenttikaavoja. Näissä ei Re :n vaihteluja oteta huomioon.

Usean eksponenttikaavan pohjana on Chezyn kaava (1775)

$$v = C\sqrt{R \cdot I} \quad (45)$$

C on kerroin

I on energiaviivan kaltevuus

R on hydraulinen säde

Chezy tarkasteli avouomaa ja kuvitteli, että nopeuskerroin

$C = 50 = \text{vakio.}$

Kun $d > 150 \dots 200 \text{ mm}$, on käytetty

a) Kutterin kaavaa

b) Manningin kaavaa

Kun $d < 150 \dots 200 \text{ mm}$, on käytetty

c) Hazen-Williamsin kaavaa

Kutter (yksinkertaistettu muoto): (1870)

$$C = \frac{100\sqrt{R}}{m + \sqrt{R}} \quad (46)$$

m on muutamilla aineilla seuraavanlainen:

sliipattu betoni, höylätty puu	^m 0.15
hitsattu putki, rautaputki	0.25
betoniputki, tiiliputki	0.30

Manning (1890)

$$C = \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{49}{148}} \cdot R^{1/6}, \text{ jolloin} \quad (47)$$

$$v = MR^{2/3} I^{1/2} \quad (48)$$

M:lle seuraavia arvoja:

uudet putket $M = 90$

käytetyt putket $M = 80$

vanhat, likaiset putket $M = 70$

$$h_f = \frac{Lv^2}{M^2 R^{4/3}} \quad (49) \quad I = h_f/L$$

Vertaamalla yleistä kitkahäviökaavaa ja Manningin kaavaa saadaan

$$M = \sqrt{\frac{8g}{fR^{1/3}}} \quad (50)$$

Manningin kaava "pelaa" karkealla vyöhykkeellä, jossa Re ei vaikuta häviöihin. Muilla alueilla ratkaisut ovat epämääräisiä.

Hazen-Williams (1903)

$$v = C' \cdot R^{0.63} \cdot I^{0.54} \quad (51)$$

Kerroin C' on riippuvainen putken iästä ja kunnosta. Seuraavia C' -arvoja on esitetty:

	sileä, uusi putki	$C' = 100$
RINNE	käytetty putki	$C' = 80$
	vanha, likainen putki	$C' = 60$

	erittäin sileä putki	$C' = 140$
	sileä puuputki	$C' = 120$
AIRAKSINEN	uusi teräsputki	$C' = 110$
	vanha teräsputki	$C' = 100$
	uusi valurautaputki	$C' = 95$
	huonokuntoinen, vanha putki	$C' = 60-80$

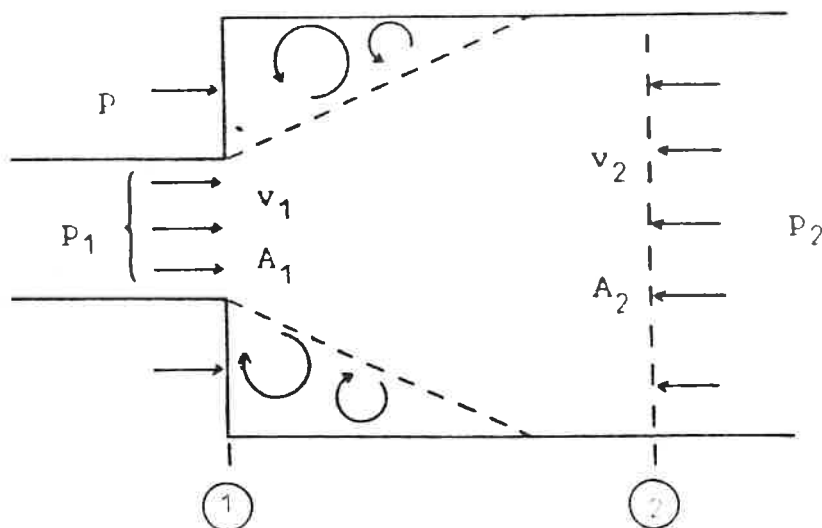
5.3 Paikallishäviöt

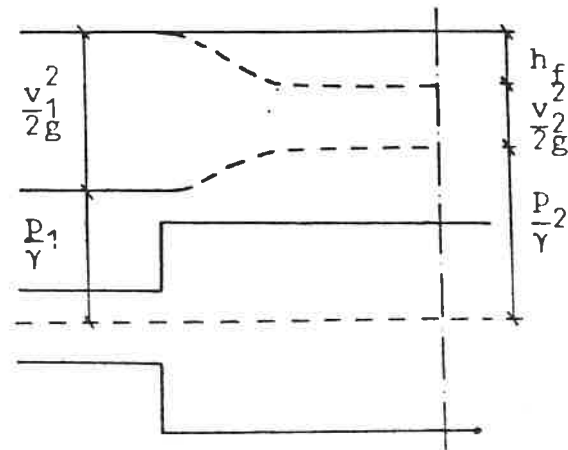
Paikallishäviöillä on merkittävää vaikutusta kokonaishäviön suuruuteen ainoastaan lyhyissä johdoissa. Sensijaan pitkissä johdoissa niiden merkitys jää usein vähäiseksi ja ne saateen jättää laskelmista pois.

Paikallisvastusten laskemiseksi lähdetään liikkeellä kaavasta

$$h_p = \sum \frac{v^2}{2g} \quad (52)$$

Äkillinen laajentuma





Aikayksikössä dt poikkileikkauksen 1 kautta tilaan 1-2 virranneen ja samassa ajassa siitä poikkileikkauksen 2 kautta ulosvirranneen vesimassan liikemäärien ero eli siis tilassa 1-2 olevan vesimassan liikemäärän muutos

$$mv_2 - mv_1 = \frac{\gamma}{g} \cdot Q \cdot dt(v_2 - v_1),$$

kun
$$m = \frac{G}{g} = \frac{\gamma \cdot V}{g} = \frac{\gamma \cdot A \cdot v \cdot dt}{g} = \frac{\gamma}{g} \cdot Q \cdot dt$$

Kun vaikuttavat voimat

- paine p_1 pintaa A_1 vastaan
- paine p_2 pintaa A_2 vastaan
- paine p rengaspintaa $A_2 - A_1$ vastaan

Projisoidaan putken akselille ja lasketaan yhteen, saadaan

$$F = p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2 + (A_2 - A_1) \cdot p$$

Oletetaan, että $p_1 = p$ (oletus on myös kokeellisesti todettu pitävän likimain paikkansa). Kun liikemäärän muutoksen on oltava saman kuin ulkoisten voimien summan ja kun huomataan, että $Q = A_2 \cdot v_2$, niin saadaan

$$(a) \quad \frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{g} (v_1 - v_2)$$

Bernoullin yhtälön mukaan taas

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_p$$

eli

$$(b) \quad \left(\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} \right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} \right) = h_p$$

Yhtälöistä (a) ja (b) saadaan h_p lausutuksi

$$h_p = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \quad (53)$$

Yleensä tämän ns. Bordan yhtälön arvot ovat liian suuria.

Jatkuvuusyhtälön

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

perusteella saadaan ξ :lle lauseke:

$$\xi = \left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)^2 \quad (\text{nopeutena } v_2) \quad (54)$$

Paikallishäviöitä laskettaessa on varmistuttava, mitä nopeusarvoja käytetään. Mikäli ξ lasketaan laajentumassa teoreettista tietä ja käytetään nopeutena v_1 :tä, saadaan

$$\xi = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \quad (55)$$

Laajentumahäviöt, kun v on ennen laajentumaa

d_1/d_2	2/3	1/2	2/5	1/5	1/10
ξ	0.35	0.60	0.75	0.95	1.0

Mikäli laajentuminen tapahtuu vähitellen, on vähennys seuraava eri laajenemiskulmilla

Kulma	8°	10°	12°	15°
Vähennys (%)	90	80	70	60

Supistumahäviöt, kun v on supistuman jälkeen

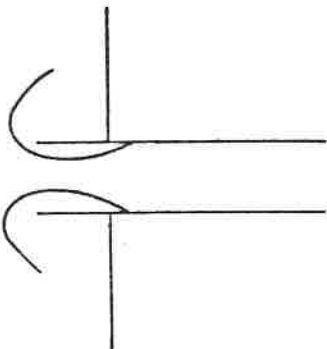
d_1/d_2	1.5	2.0	2.5	5.0	10.0
ξ	0.25	0.35	0.40	0.50	0.50

Jos supistuminen tapahtuu vähitellen, se voidaan jättää ottamatta huomioon.

Nieluhäviöt



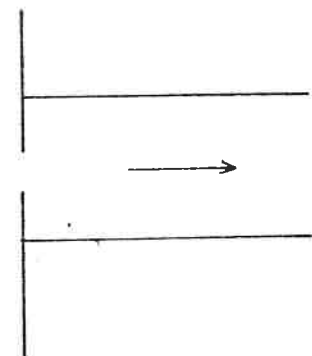
$$\xi = 0.5$$



$$\xi = 1.0 \quad (0.60 \dots 1.30)$$

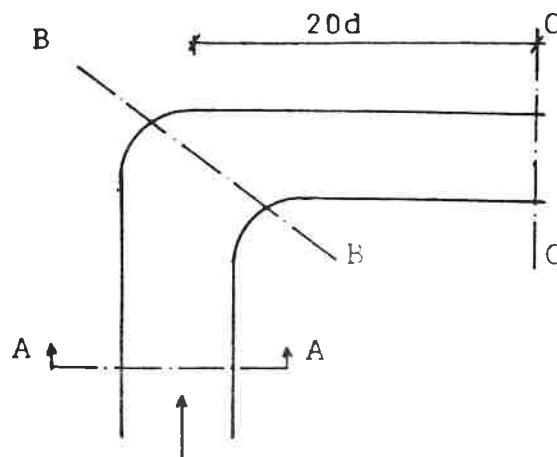


$$\xi = 0.05$$

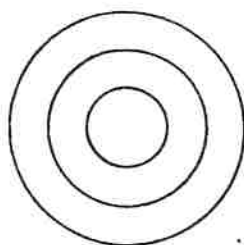


Esimerkki ratkaisusta, jossa
syntyy suuret häviöt

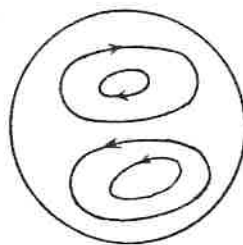
Kaarrehäviöt



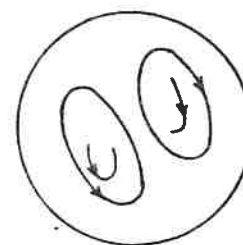
Kaarteessa nopeusjakautuman muoto muuttuu



Leikkaus A-A



Leikkaus B-B



Leikkaus C-C

Kaarrehäviöiden suuruus riippuu kaarresäteistä, putken halkaisijasta ja kaarrekulmasta sekä ennen kaikkea virtausnopeudesta.

Venttiilihäviöt

Paras turvautua valmistajan ilmoittamiin venttiilihäviöarvoihin.

Haarautumishäviöt

Taulukoita löytyy käsikirjoista. Esim. Hosian kirjoitus.

Ekvivalenttiputken pituus

$$h_p = \xi \frac{v^2}{2g}$$

$$h_f = f \frac{L_{\text{ekv.}}}{d} \frac{v^2}{2g}$$

$$\text{Merkitsemällä } h_p = h_f$$

$$\therefore L_{\text{ekv.}} = \frac{\xi}{f} \cdot d \quad (56)$$

$L_{\text{ekv.}}$ lisätään putken todelliseen pituuteen. Häviölaskelmat suoritetaan yhteenlasketulle putken pituudelle eikä tällöin tarvitse ottaa huomioon muuta kuin putken kitkahäviö.

Välppähäviöt

Kirschmerin mukaan

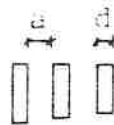
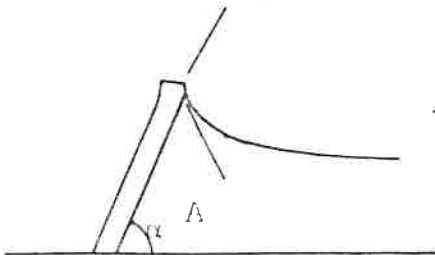
$$\xi = \beta \left(\frac{d}{a}\right)^{4/3} \sin \alpha \quad (57)$$

β = muotokerroin

α = kaltevuuskulma

d = välppäteräksen paksuus

a = terästen vapaa väli



Purkautumishäviöt

Purkautumishäviö on suurempi kuin nieluhäviö. Veden alla tapahtuvaa purkautumista voidaan käsitellä Bordet-Garaotin kaavalla. $\xi = 1.0$.

5.4 Kalliotunnelit

Kallioon veden johtamista varten louhittu painetunneli on luonteeltaan putkijohto, joskin se eroaa normaalista putki-

johdosta mm. seuraavasti:

- poikkileikkaukset ovat suuria (yli 4 m²)
- poikkileikkaus ei yleensä ole ympyrä
- pinnan karkeus on suurehko

Kalliotunneleita ovat tutkineet Pohjoismaissa Lennart Rahm ja Seppo Priha.

Häviöt lasketaan Darcyn kaavalla

$$h_f = f \cdot \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g}$$

Kitkakerroin f määrätään joko Rahmin tai Prihan menetelmällä. Rahmin menetelmää suositetaan suurille ja Prihan pienille (4...20 m²) tunneleille. Kitkakertoimen määrittämisen lähtökohtana on oletus, että louhinnan aiheuttamat syvennykset, ns. ryöstöt, aikaansaavat energiaa kuluttavia pyörteitä ja tehokas poikkileikkausala pienenee.

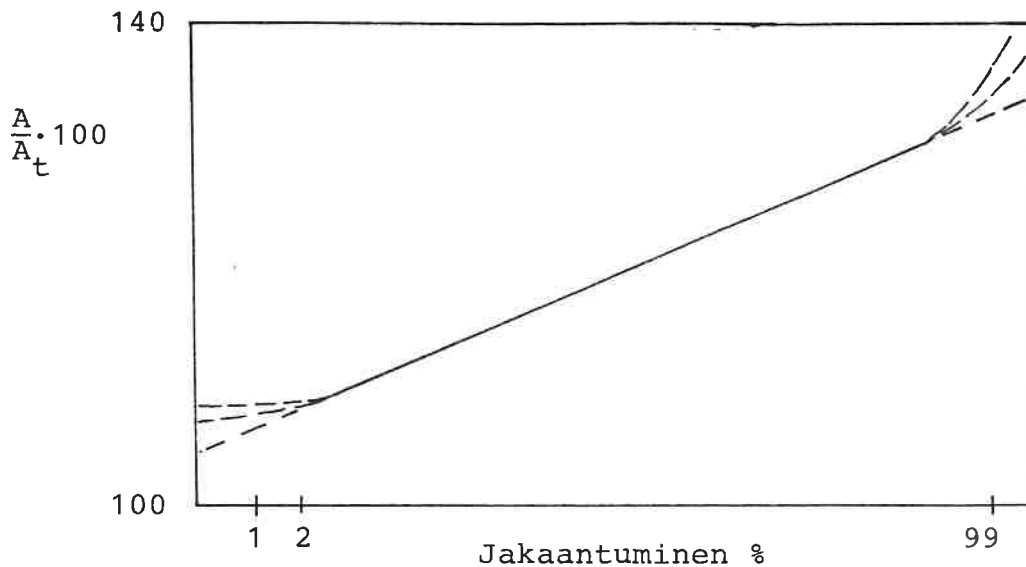
Rahm arvioi ryöstöjä poikkipinta-alan suhteellisen vaihtelun avulla

$$\delta = \frac{A_{99} - A_1}{A_1} \cdot 100 \% \quad (58)$$

A_{99} on 99 % jakautumaa vastaava poikkileikkaus

A_1 on 1 % jakautumaa vastaava poikkileikkaus.

Rahm totesi, että kitkakerroin f on suurinpiirtein lineaarisesti riippuvainen poikkipinta-alan suhteellisesta vaihtelusta.



A_t = teoreettinen poikkipinta-ala

$$f = 2.75 \cdot 10^3 \cdot \delta$$

$$h_f = 19.7 \cdot \frac{L \cdot Q^2}{R_t \cdot A_t^2} \cdot \frac{\delta}{(200 + \delta)^{2.5}} \quad (59)$$

Tavanomaisilla tunnelipoikkileikkauksilla

$$R \approx 0.27 \cdot A^{0.5} \quad (60)$$

jolloin kaava on muodossa

$$h_f = 73 \cdot \frac{LQ^2}{A_t^{2.5}} \cdot \frac{\delta}{(200 + \delta)^{2.5}} \quad (61) \quad \text{Rahm}$$

Priha on esittänyt Hiidenvesitunnelissa tehtyjen mittaus-
ten perusteella pienille verhoamattomille tunneleille

$$h_f = 87.7 \frac{LQ^2}{A_t^2 (A_t + 9)^{0.5}} \cdot \frac{\delta}{(200 + \delta)^{2.5}} \quad (62) \text{ Priha}$$

Soveltuvuusalue $\delta = 35 \dots 60 \%$

$$A = 4 \dots 20 \text{ m}^2$$

Kivilajin vaikutus

Pieni δ : ehjät graniitit, granodioriitit, voimakkaasti migmaattiset gneissit eli syväkivimäiset eheät kivilajit, joiden rakoiluaste on heikko

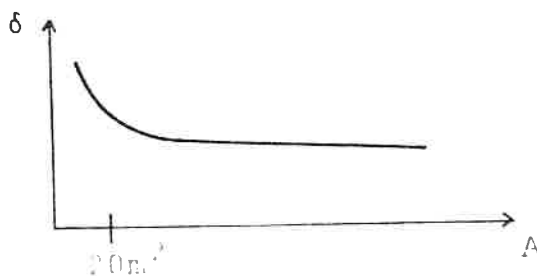
Keski-

suuri δ : syväkivilajit, joiden rakoiluaste on keskinkertainen

Suuret δ : välikiviä sisältävät, rakoilultaan voimakkaat kivilajit sekä ruhjevyöhykkeet

Louhinnalla on luonnollisesti δ :hen suuri vaikutus.

Suurilla poikkileikkauksilla ei poikkileikkauksen koon muutos vaikuta sanottavasti δ :n arvoon. Kun $A < 20 \text{ m}^2$, kasvaa δ jyrkästi pienentymisen myötä. Poikkileikkauksen muodon vaikutus on vähäinen.



4.5 PUTKIVIRTAUKSEN LASKEMINEN

I Virtaama ja dimensiot tunnetaan, kysytään häviöitä

1. Arvioidaan ξ_i
2. Lasketaan $v_i Re_i$
3. Lasketaan f_i
4. Lasketaan häviöt $h_f + h_p$

II Dimensiot tunnetaan, kysytään virtaamaa

Kaksi vaihtoehtoista tapaa

- a) iteroidaan virtaama arvaamalla Q_1 ja lasketaan häviöt kuten kohdassa I. Uusi arvio virtaamalle saadaan esimerkiksi seuraavasti

$$Q_2 = Q_1 \sqrt{h_{\text{tod}}/h_1}$$

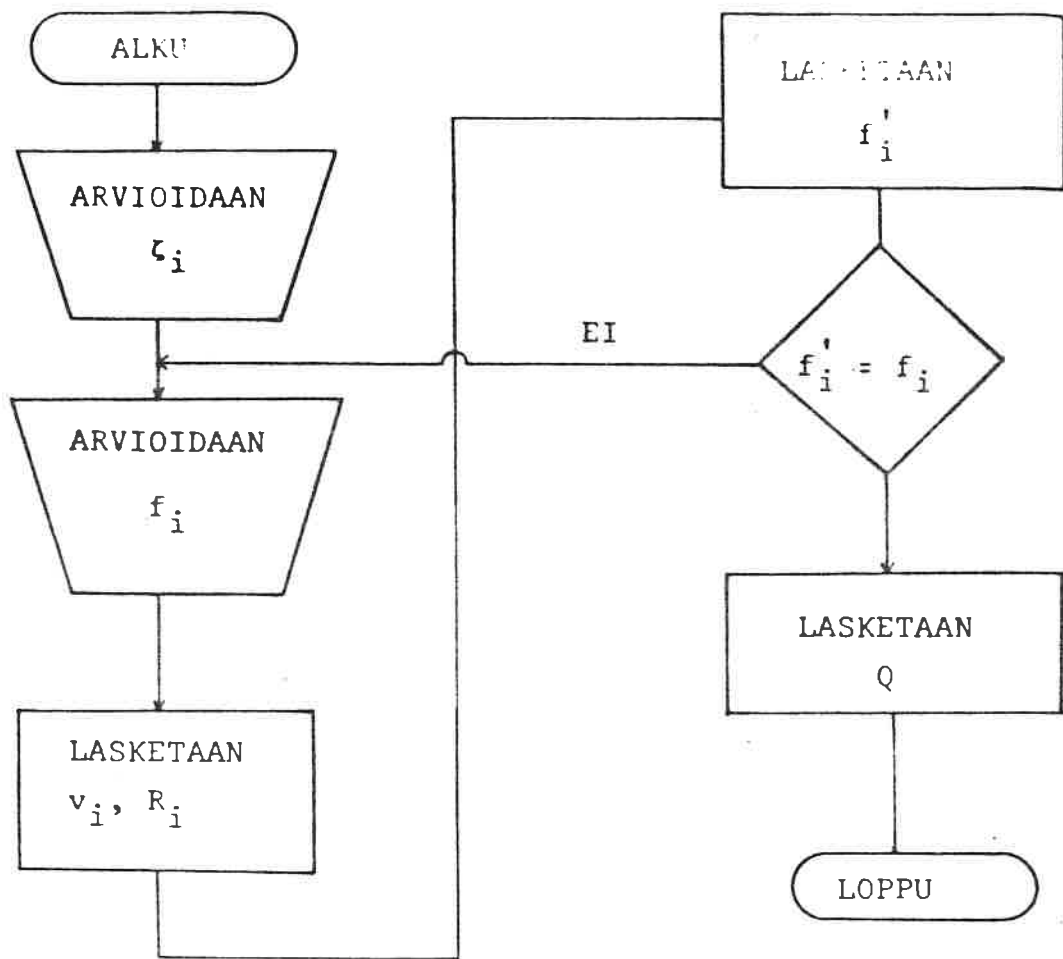
h_{tod} = todellinen häviö

h_1 = virtaamalle Q_1 laskettu häviö

Virtaamalla Q_2 lasketaan häviö h_2 . Kun pisteet Q_1 , h_1 ja Q_2 , h_1 asetetaan logaritmipaperille ja piirretään niiden kautta suora, voidaan suoralta lukea kohdalta h_{tod} todellinen virtaama

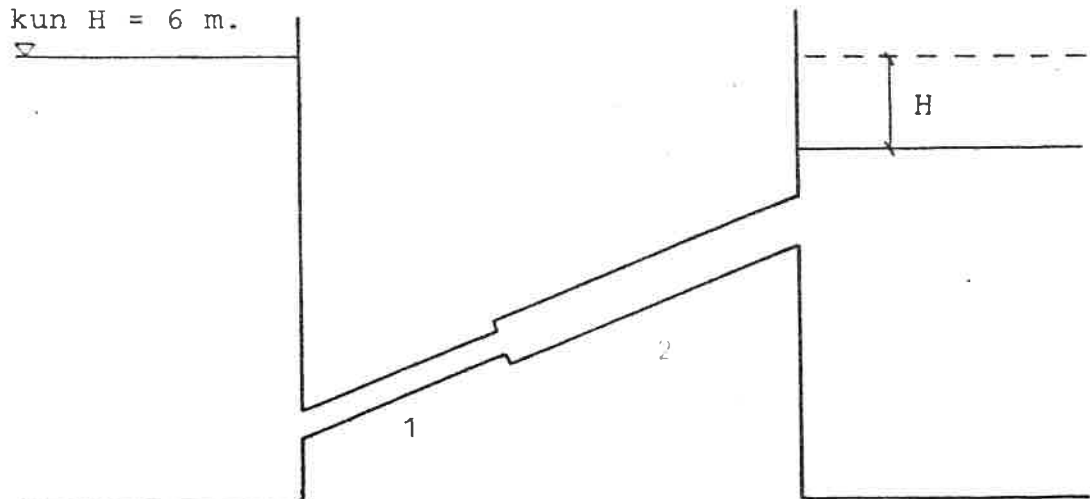
- b) iteroimalla kitkahäviökertoimen avulla

Tässä menetelmässä arvataan kitkahäviökerroin ja lasketaan virtausnopeudet ja Reynoldsin luvut. Reynoldsin lukujen avulla lasketaan kitkakerroin uudelleen ja verrataan arvaukseen. Tarvittaessa laskelma toistetaan.



Esimerkki. Laske virtaama kuvan esittämässä tapauksessa,

kun $H = 6$ m.



$$L_1 = 300 \text{ m}$$

$$L_2 = 240 \text{ m}$$

$$d_1 = 60 \text{ cm}$$

$$d_2 = 90 \text{ cm}$$

$$k_1 = 1.5 \text{ mm}$$

$$k_2 = 0.3 \text{ mm}$$

1) Paikallishäviökertoimet:

$$\xi_{\text{nielu}} = 0.50$$

$$\xi_{\text{laaj.}} = 1 \times \left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right) = 1.56$$

$$\xi_{\text{purk.}} = 1.0$$

$$\begin{aligned} \Sigma h_p + h_f &= \xi_{\text{nielu}} \cdot \frac{v_1^2}{2g} + f_1 \frac{L_1}{d_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g} + \xi_{\text{laaj.}} \frac{v_2^2}{2g} \\ &+ f_2 \cdot \frac{L_2}{d_2} \cdot \frac{v_2^2}{2g} + \xi_{\text{purk.}} \cdot \frac{v_2^2}{2g} \end{aligned}$$

Tiedetään:

Jatkuvuusyhtälö:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \therefore \quad v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 v_2$$

$$\therefore v_1 = 2.25 v_2 \Rightarrow v_1^2 = 5.06 v_2^2$$

Painehäviö:

$$\Sigma h_p + h_f = 6 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \Sigma h_p + h_f &= 6 = \frac{v_2^2}{2g} (0.50 \cdot 5.06 + f_1 \cdot 2530 \\ &+ 1.56 + f_2 \cdot 266.7 + 1.0) \end{aligned}$$

Ratkaistaan v_2 :

$$v_2 = 10.8 \sqrt{\frac{1}{5.09 + 2530 \cdot f_1 + 266.7 \cdot f_2}}$$

$$k_1/d_1 = 2.5 \cdot 10^{-3} = 0.0025$$

$$k_2/d_2 = 3.33 \cdot 10^{-4} = 0.00033$$

$$\text{Re} = \frac{vd}{\nu} \quad \text{Re}_1 = 6 \cdot 10^5 v_1 = 1.35 \cdot 10^6 v_2$$

$$\text{Re}_2 = 9 \cdot 10^5 v_2$$

		f	v	Re	f (Moody)
Putki	1	0.025	2.86	$1.71 \cdot 10^6$	0.25
	2	0.015	1.27	$1.14 \cdot 10^6$	0.016
Putki	1	0.025	2.87		
	2	0.016	1.27		

$$\text{Virtaama } Q = \frac{\pi d_2^2}{4} v_2 = 0.81 \text{ m}^3/\text{s}$$

Esimerkki: Laske edellinen tehtävä ekvivalenttiputkena.

Ts. muuta systeemi putkeksi, jonka halkaisija on vakio ja jonka pituudessa paikallishäviöt on otettu huomioon.

Systeemit ovat ekvivalentteja, kun sama häviö vastaa samaa virtaamaa.

$$h_{f1} = f_1 \frac{L_1}{d_1} \cdot \frac{Q_1^2}{\left(\frac{\pi d_1^2}{4}\right)^2 \cdot 2g} = \frac{f_1 L_1}{d_1^5} \cdot \frac{8Q_1^2}{\pi^2 g}$$

vastaavasti:

$$h_{f2} = \frac{f_2 L_2}{d_2^5} \cdot \frac{8Q_2^2}{\pi^2 g}$$

Ekvivalenttisuudesta seuraa:

$$h_{f1} = h_{f2}$$

$$Q_1 = Q_2$$

Kun merkitään $h_{f1} = h_{f2}$

$$\frac{f_2 L_2}{d_2^5} \cdot \frac{8Q_2^2}{\pi^2 g} = \frac{f_1 L_1}{d_1^5} \cdot \frac{8Q_1^2}{\pi^2 g}$$

$$\frac{f_2 L_2}{d_2^5} = \frac{f_1 L_1}{d_1^5}$$

$$\text{Ratkaistaan } L_2 = L_1 \cdot \frac{f_1}{f_2} \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^5$$

Esimerkki: 1000 metriä 8 cm:n putkea on korvattava 6 cm:n putkella $f_1 = 0.02$, $f_2 = 0.018$

$$L_2 = 1000 \cdot \frac{0.020}{0.018} \left(\frac{6}{8} \right)^5 = \underline{264 \text{ m}}$$

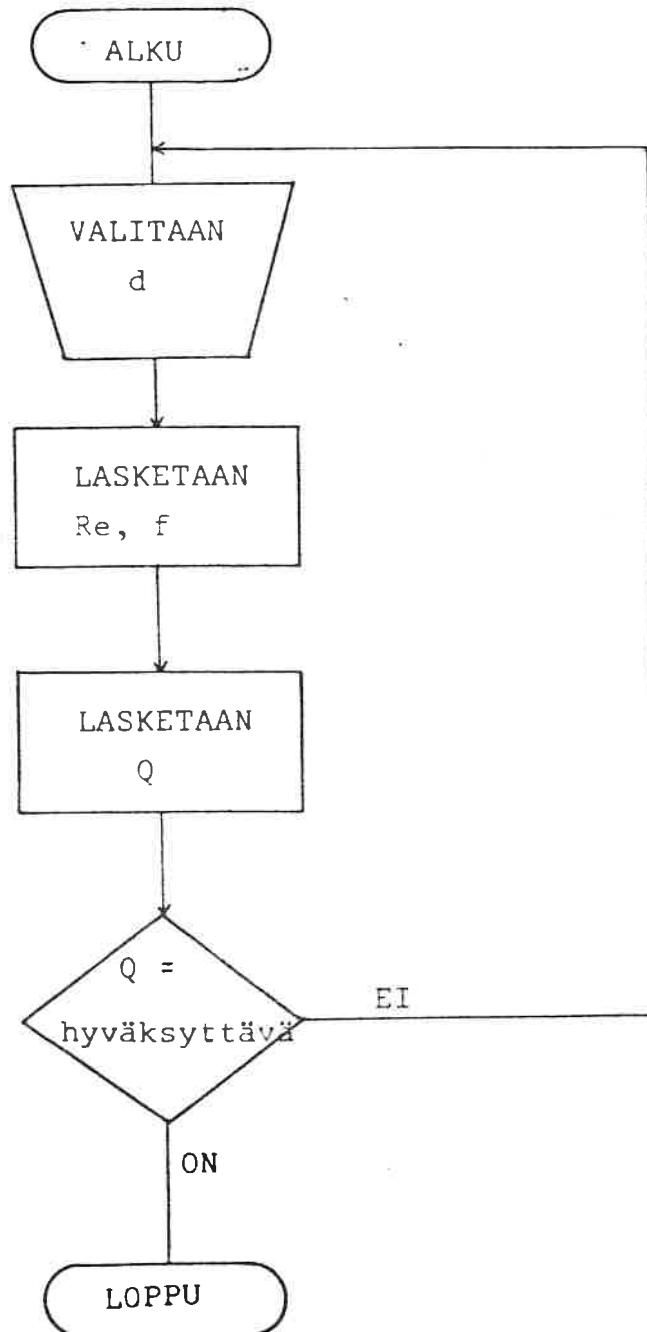
1. Korvataan paikallishäviöt ekvivalentilla putkella

$$\text{Putki 1.} \quad f_1 \frac{L_{e1}}{d_1} \frac{v^2}{2g} = \xi \frac{v^2}{2g} \quad \therefore \quad L_{e1} = \frac{\xi \cdot d_1}{f_1}$$

$$L_{e1} = \frac{\xi}{f_1} \cdot d_1 = \frac{0.5}{0.025} \cdot 0.6 = 12 \text{ m}$$

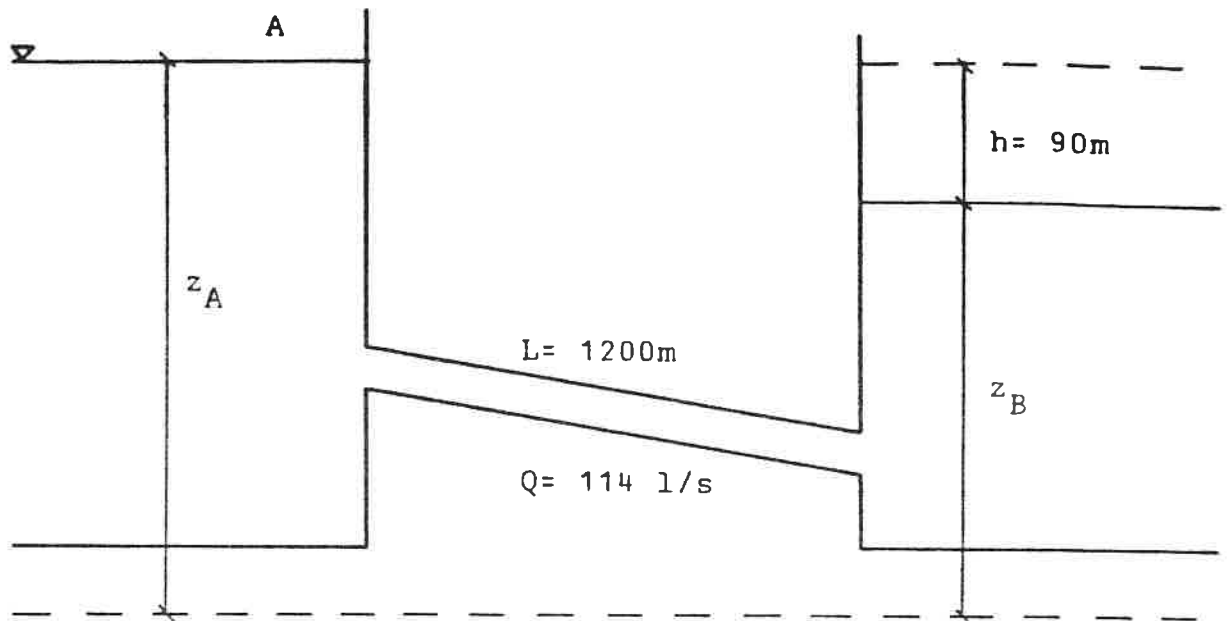
III Virtaama tunnetaan. Kysytään putkikokoa.

Mikäli halutaan tarkka ratkaisu, kulkee ratkaisu seuraavasti



Käytännössä käytetään yleensä taulukkoja ja nomogrammeja, joilla haetaan sopiva standardiputkikoko.

Esimerkki: Määrättävä teoreettinen putkikoko



Bernoulli

$$\frac{p_A}{\gamma} + z_A + \frac{v_A^2}{2g} = \frac{p_B}{\gamma} + z_B + \frac{v_B^2}{2g} + h$$

$$p_A = p_B = 0$$

$$v_A = v_B = 0, \text{ koska allas on niin suuri}$$

$$h = 90 \text{ m}$$

$$h = \xi_1 \frac{v^2}{2g} + \xi_2 \frac{v^2}{2g} + f \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g}$$

$$\xi_1 = 0.25$$

$$\xi_2 = 1.0$$

$$h = \left(1.25 + f \frac{1200}{d}\right) \frac{v^2}{2g} = \left(1.25 + f \frac{1200}{d}\right) \frac{Q^2}{2gA^2}$$

$$Q = \sqrt{\frac{1089,2d^5}{1.25d + 1200 f}}$$

d	Re	f	Q (m ³ /s)
10	$1.45 \cdot 10^6$	0.038	0.015
20	$0.73 \cdot 10^6$	0.031	0.095
30	$0.48 \cdot 10^6$	0.028	0.278
21	$0.69 \cdot 10^6$	0.030	0.109
21.4	$0.68 \cdot 10^6$	0.031	0.115

Teoreettinen putkikoko on 21.4 cm. Reynoldsin lukua määrittäessä on virtaamana käytetty vaadittua virtaamaa (114 l/s).

Menetelmä 2. Lausutaan putkikoko d implisiittisessä muodossa ja iteroidaan

$$d^5 = \frac{Q^2 (1.25d + 1200) f}{1089,2}$$

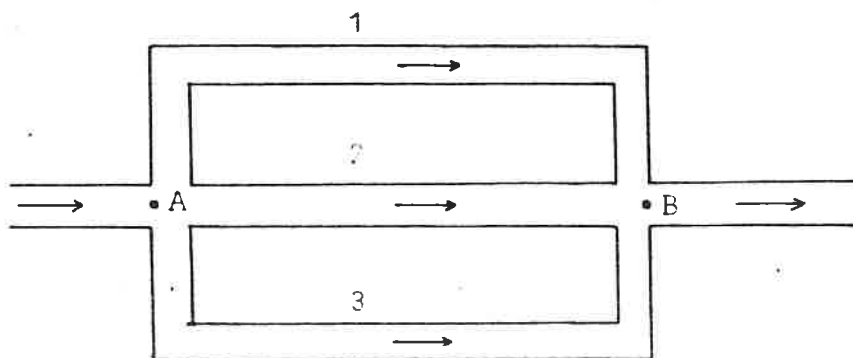
Putkisysteemit

Bernoullin yhtälön ja jatkuvuusyhtälön on pädeittävä kaikkialla putkissa. Tämä tietää sitä, että kutakin putkea pitkin lasketun energiaviivan tulee leikata putkien yhtymäkohdassa samassa pisteessä. Jatkuvuusyhtälön mukaan taas risteyksestä lähtee yhtä paljon vettä kuin siihen tulee.

Esimerkki

Määrää virtaaman jakaantuminen ja paine pisteessä B.

$Q = 0.34 \text{ m}^3/\text{s}$, $\rho = 1030 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Paine pisteessä A on $5.52 \times 10^5 \text{ N/m}^2$. Pisteen A korkeus on 30 m ja pisteen B 24 m.



$$L_1 = 900 \text{ m}$$

$$L_2 = 600 \text{ m}$$

$$L_3 = 1300 \text{ m}$$

$$d_1 = 30 \text{ cm}$$

$$d_2 = 20 \text{ cm}$$

$$d_3 = 40 \text{ cm}$$

$$k_1 = 0.3 \text{ mm}$$

$$k_2 = 0.03 \text{ mm}$$

$$k_3 = 0.24 \text{ mm}$$

Putki 1. Arvataan $Q_1' = 0.08 \text{ m}^3/\text{s}$, josta seuraa,

että $v_1' = 1.13 \text{ m/s}$

$$\text{Re}_1 = 121560$$

$$k_1/d_1 = 0.001$$

$$f_1' = 0.022$$

$$h_{f1}' = 0.022 \cdot \frac{900}{0.3} \cdot \frac{1.13^2}{2g} = 4.30 \text{ m}$$

Putki 2. $4.30 = f_2' \cdot \frac{600}{0.2} \cdot \frac{v_2'^2}{2g}$

$$k_2/d_2 = 0.00015$$

arvataan $f_2' = 0.02$, jolloin

$$v_2' = 1.19 \text{ m/s}$$

$$\text{Re}_2' = 8.5 \cdot 10^4$$

$$v_2 = 1.22 \text{ m/s}$$

$$Q_2 = 0.038 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{Putki 3.} \quad 4.30 = f_3' \cdot \frac{1200}{0.4} \cdot \frac{v_3'^2}{2g}$$

$$k_3/d_3 = 0.006$$

$$\text{arvataan } f_3' = 0.02$$

$$v_3' = 1.19 \text{ m/s}$$

$$Re_3' = 1.69 \cdot 10^5$$

arvaus oikein

$$Q_3' = 0.150$$

$$\Sigma Q_i = 0.268 \text{ m}^3/\text{s}$$

Suoritetaan painotus:

$$Q_1 = \frac{0.08}{0.268} \cdot 0.34 = 0.102$$

$$Q_2 = 0.048$$

$$Q_3 = 0.190$$

Tarkistetaan

	$v \text{ (m/s)}$	Re	f	h_f
Putki 1	1.44	$1.54 \cdot 10^5$	0.021	6.61
2	1.53	$1.09 \cdot 10^5$	0.019	6.80
3	1.51	$2.16 \cdot 10^5$	0.019	6.62

6. AVOUOMAVIRTAUS

6.1 Yleisiä näkökohtia

Avouomavirtaukselle luonteenomaista on vapaa vedenpinta, johonka vaikuttaa ainoastaan ilmäkehän aiheuttama paine. Luonnolliset vesistöt, ojat, kanavat ym. esimerkkejä avouomista. Vapaan vedenpinnan olemassaolo aiheuttaa, että virtauksen käsittely on merkittävästi hankalampaa kuin putkessa. On hankalaa luoda yleispäteviä malleja, koska poikkileikkauksen muoto ja karkeusominaisuudet alinomaan vaihtuvat.

Näistä syistä avouomavirtausta joudutaan käsittelemään vielä enemmän kokeelliselta pohjalta kuin putkivirtauksen kyseessä ollen. Edellä esitetty pohdiskelu Reynoldsin luvun ja karkeuden merkityksestä ei kovin hyvin sovellu avouomavirtauksen käsittelyyn. Avouomavirtauksessa onkin pienoismallitarkastelulla ratkaisevan tärkeä merkitys.

6.2 Kitkahäviö avouomassa

Avouomavirtauksessa näyttelee käsite hydraulinen säde R paljon suurempaa osuutta kuin putkivirtauksessa, joten on syytä palauttaa mieliin kaava

$$R = \frac{A}{p} \quad (D = 4R)$$

R :ää kutsutaan myös hydrauliseksi keskisyvyydeksi.

Samoin kuin putkissa voi myös avouomissa esiintyä sekä laminaarista että turbulenttia virtausta. Laminaarivirtaus on tosin varsin harvinaista ja sen käsittely ei sisällä mitään olennaista uutta putkivirtauksen käsittelyyn. Jos kitkahäviölle käytetään kaavaa

$$h_f = f \cdot \frac{L}{4R} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

on f laminaarivirtauksessa $f = \frac{96}{Re}$.

Turbulenssivirtauksessa voidaan kuvitella päästävän tulokseen arvolla

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{Re\sqrt{f}} + \frac{k/4R}{3.71} \right) \quad (63)$$

mutta käytännössä tämänlaatuinen ratkaisutapa ei ole saavuttanut merkitystä. Tähän syynä on, että k :lle ei ole kovin helppoa löytää arvoa.

Reinius (1961) on esittänyt avouomavirtaukselle yhtälöt

Hydraulisesti sileä alue	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{Re\sqrt{f}}{3.4}$	(64)
-----------------------------	--	------

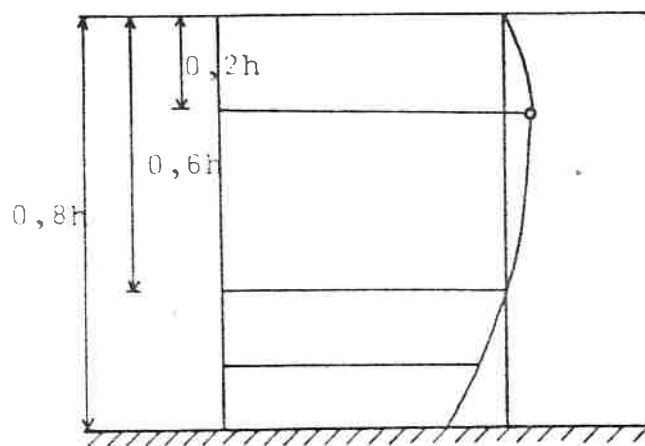
Siirtymävyöhyke	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{k/R}{12.4} + \frac{3.4}{Re\sqrt{f}} \right)$	(65)
-----------------	---	------

Hydraulisesti karkea alue	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{12.4 R}{k}$	(66)
------------------------------	--	------

Avouomille, joiden poikkileikkaus on suorakaide, vesisyvyys y ja leveys $4y$ ja $2y$ käytetään kaavoissa 3.4:n tilalla arvoja 2.9 ja 2.8 ja 12.4:n tilalla arvoja 14.4 ja 14.8.

6.3 Nopeuden jakautuminen

Avouomassa lähellä uoman pohjaa nopeus kasvaa jyrkästi. Rajakerroksen jälkeen nopeusjakautuma on kuitenkin suhteellisen tasainen. Virtaamanopeus ei ole suurin pinnalla, vaan jonkin verran alempana $(1/5 \dots 1/3) \times h$. Käytännössä virtaamisnopeuden määrittäminen on esimerkiksi virtaaman mittaamisen kannalta ensiarvoisen tärkeitä. ($Q = v_m \cdot A$)

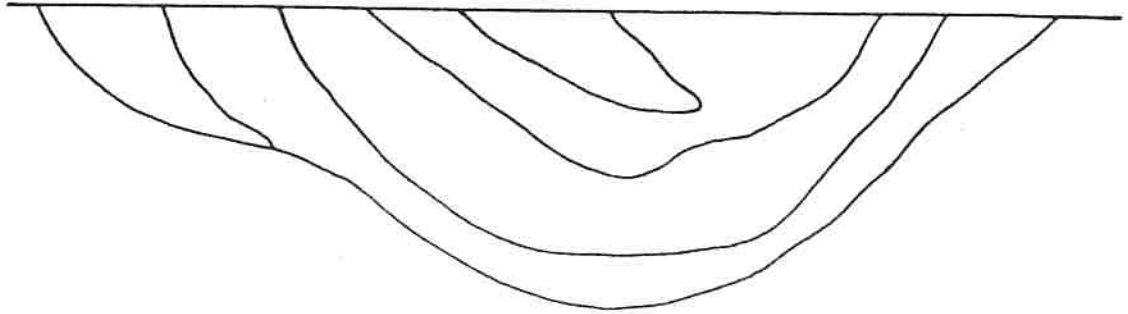


Karkeasti voidaan arvioida, että $0.6 \cdot h$:n syvyydellä virtausnopeus on keskinopeuden suuruinen.

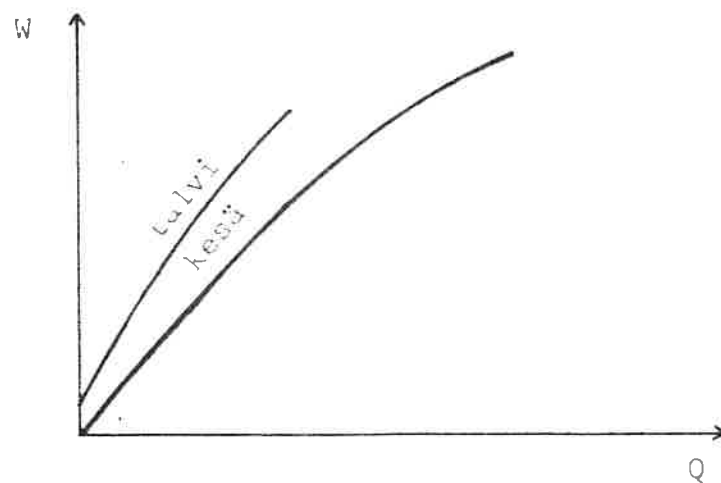
Tarkempaan tulokseen päästään, mikäli nopeus mitataan $0.8 h$ ja $0.2 h$:n syvyydellä, jolloin

$$v_m \approx \frac{v_{0.8} + v_{0.2}}{2} \quad (67)$$

Nopeuden tasa-arvokäyrät ovat isotakeja



Talvella jää aiheuttaa hankauksellaan lisääntyviä häviöitä. Uoma muistuttaa putkea ja märän piirin suuretessa hydraulinen säde ja virtausnopeus pienenevät.



Nopeuden epätasainen jakautuminen otetaan Bernoullin yhtälössä huomioon korjauskertoimella α ja impulssilauseessa kertoimella β .

$$\text{Bernoulli: } z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2} \quad (68)$$

$$\text{Impulssi: } \beta \rho Q (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = \Sigma \bar{F} \quad (69)$$

6.4 Häviöt tasaisessa virtauksessa

Tasaisessa virtauksessa on energiaviivan kaltevuus sama kuin vedenpinnan korkeus, mutta myös sama kuin pohjan kaltevuus. Kineettisen energian lisääntymistä ei tasaisessa virtauksessa esiinny.

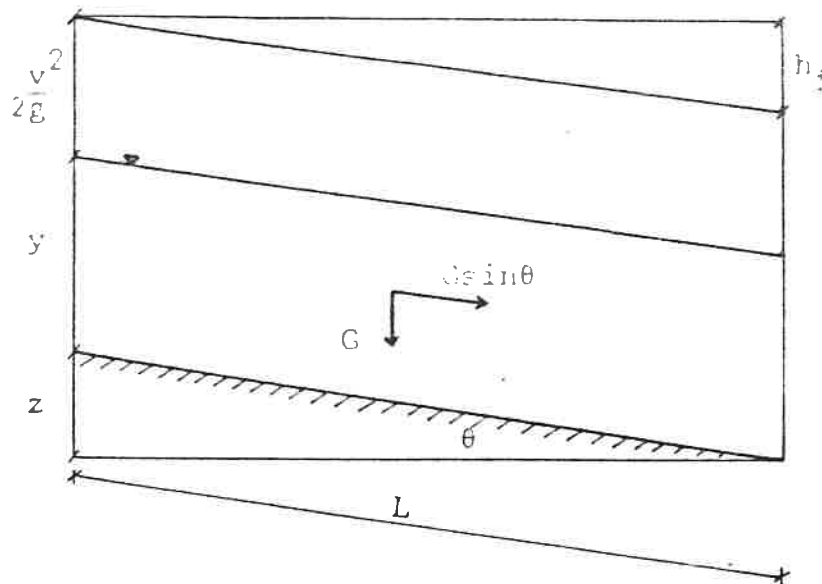
$$I = \frac{h_f}{l} = \frac{z_1}{l} \quad (70)$$

Kaavoja häviöiden laskemiseksi

(Turbulentti tilanne $Re > 500$)

Chezy $v = C\sqrt{RI}$ (71)

C on vakio, jonka arvo riippuu uoman korkeudesta, mutta myös energiaviivan kaltevuudesta. Chezyn kaava saadaan seuraavasti:



Virtausta vastustava voima on verrannollinen nopeuden neliöön ja uoman pinta-alaan $\therefore$ vastusvoima $= k \cdot v^2 \cdot p \cdot L$

Virtausta vie eteenpäin voima

$$G \sin \theta = \gamma \cdot A \cdot L \cdot \underbrace{\sin \theta}_I$$

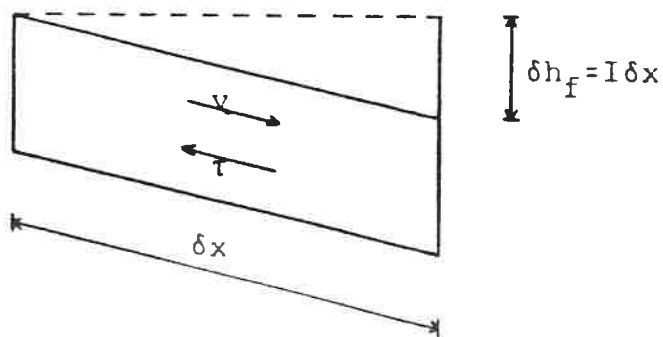
Voimat pitävät toisensa tasapainossa:

$$k \cdot v^2 \cdot p \cdot L = \gamma \cdot A \cdot L \cdot I \quad , \text{ josta}$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma}{k}} \cdot \sqrt{RI}$$

eli $v = C\sqrt{RI}$

(71)



$$(h_f = f \cdot \frac{L}{4R} \cdot \frac{v^2}{2g})$$

$$\partial h_f = I \cdot \partial x \quad ; \quad I = \partial h_f / \partial x$$

$$\frac{dh_f}{dx} = \frac{fv^2}{8gR} = I \quad \therefore \quad v = \sqrt{8g/f} \sqrt{RI}$$

$C = \sqrt{8g/f}$, joka on yhteys Darcyn ja Chezyn kaavojen välillä.

Kertoimen C ratkaisemiseksi on tehty runsaasti tutkimustyötä, jonka tuloksena on saatu aikaan monia kaavoja:

1. GANGUILLET-KUTTER (täydellinen 1869)

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0.00155}{I}}{1 + (23 + \frac{0.00155}{I}) \cdot \frac{n}{\sqrt{R}}} \quad (72) \quad \begin{array}{l} \text{Huom!} \\ I \text{ mukana} \end{array}$$

R on metreinä

n on karkeuskerroin, joka saadaan taulukosta

v:n määrittämiseksi on kirjoissa nomogrammeja.

2. BAZIN (1897)

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} \quad (73) \quad \gamma = \text{karkeus}$$

3. PAVLOVSKI (1925)

$$C = \frac{R^Y}{n} \quad (74)$$

$$Y = 2.5\sqrt{n} - 0.13 - 0.75\sqrt{R} (\sqrt{n} - 0.10)$$

Likimääräisarvoina voidaan käyttää

$$\text{Jos } R < 1.0 \text{ m} \quad Y = 1.5\sqrt{n}$$

$$\text{Jos } R > 1.0 \text{ m} \quad Y = 1.3\sqrt{n}$$

4. THIJSEN

$$v = \log \frac{12R}{k} RI \quad (75) \quad k = \text{karkeuden mittaluku}$$

MANNINGIN KAAVA

Nykyään suosituimman kaavan aseman on ainakin meillä saavuttanut irlantilaisen Manningin kaava (1890), joka on muotoa

$$v = \frac{1}{n} R^{2/3} I^{1/2} \quad \text{tai}$$

$$v = MR^{2/3} I^{1/2} \quad (76)$$

Kun Manningin kaavaa verrataan Chezyn kaavaan, havaitaan, että seuraava yhteys on voimassa

$$C = M \cdot R^{1/6} \quad (77)$$

Manningin kaavan kertoimen määrittämiseksi on meillä tehty varsin niukasti tutkimuksia ja lähes poikkeuksetta joudutaan käyttämään muualla käyttökelpoiseksi todettuja arvoja. Kertoimen arvoon vaikuttavat seuraavat tekijät:

- pinnan karkeus
- kasvillisuus
- poikkileikkauksen vaihtelut
- uoman mutkaisuus
- uoman liettyminen ja syöpyminen
- uomassa olevat esteet
- uoman koko ja muoto
- h ja Q
- vuodenaikaiset virtaamat

Cowan (1956) laski $n:n$ seuraavasti:

$$n = (n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4)m_5 \quad (78)$$

n_0 = perusarvo

n_1 = pinnan epätasaisuudet

n_2 = poikkileikkauksen vaihtelut

n_3 = esteet

n_4 = kasvillisuus

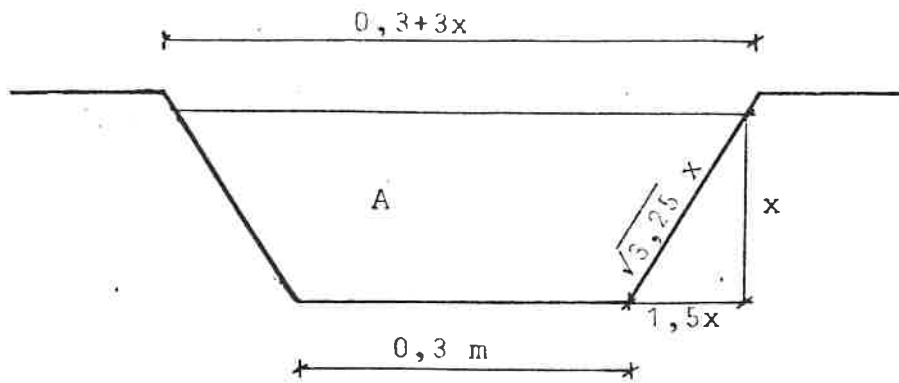
m_5 = mutkaisuus

V.T. Chow:n kirjassa on esitetty taulukko ja kuvia $n:n$ määrittämiseksi. Hosian kirjoituksessa (RIL, Vesirakennus) on ko. taulukko, samoin Cowanin arvot.

Kun uoma on jääpeitteen kattama, on Mauri Kuuskoski ehdottanut, että poikkileikkausalan supistaminen tulisi ottaa huomioon täysimääräisenä ja hydraulista sädettä R laskettaessa märkään piiriin otetaan mukaan

- 1/4 jään alapinnan leveydestä syksyllä
- 1/3 " " " keskitalvella
- >1/2 kun on suppoa, pohjajäätä jne.

Esimerkki. Kuinka suureksi tulee vesisyvyys ojassa, jonka pohjan leveys on 0.3 m, luiskien kaltevuus 1:1.5 ja putous 0.001, mikäli $Q = 0.2 \text{ m}^3/\text{s}$.



Käytetään Manningin kaavaa ja annetaan M:lle arvo 35.

$$A = x(0.3 + 1.5x)$$

$$p = 0.3 + 2x\sqrt{3.25}$$

$$R = \frac{A}{p} = \frac{x(0.3 + 1.5x)}{0.3 + 2x\sqrt{3.25}}$$

joten

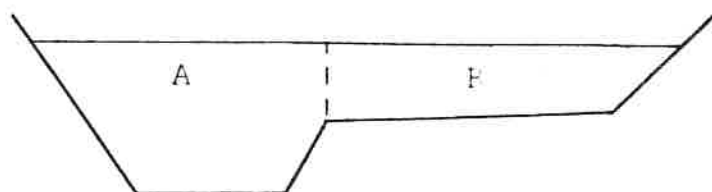
$$0.2 = x(0.3 + 1.5x) \cdot 35 \cdot \frac{x(0.3 + 1.5x)^{2/3}}{0.3 + 2x\sqrt{3.25}} \cdot \sqrt{0.001}$$

Ratkaistaan x iteroimalla

$$\underline{x = 0.47 \text{ m}}$$

Normaalitapauksissa on käytettävissä nomogrammit Q:n määrittämiseen.

Mikäli poikkileikkaus on tällainen,



voidaan tehtävä jakaa kahtia ja arvioida virtaama kummallekin osalle erikseen.

6.5 Ominaisenergia

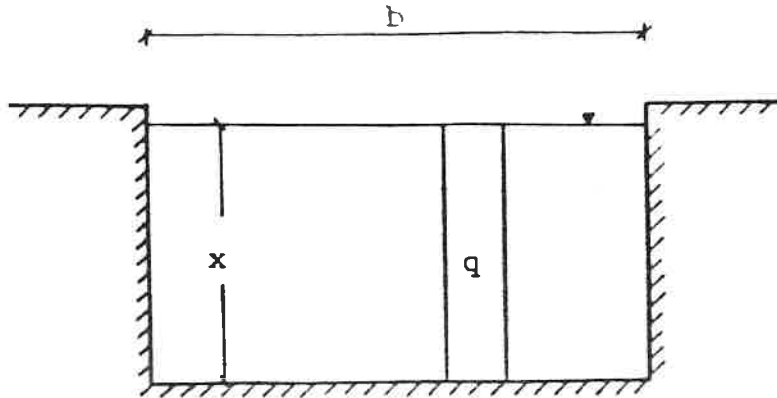
Avouomissa on osoittautunut, että käsite "ominaisenergia" mahdollistaa monien eri ilmiöiden yksinkertaista ja selvää käsittelyä.

Aiemmin on useassa eri yhteydessä käsitelty Bernoullin yhtälöä ja havaittu, että eri neste-elementtien energiasisältö on ideaalinsteessä vakio pitkin jokaista virtaviivaa ja että todellisessa nesteessä energiaviiva alituisen putoaa. Energiasisällön on havaittu koostuvan liike-, paine- ja asemaenergian summana. Nyt määritellään nesteen ominaisenergia paine- ja massayksikköä kohti ja vertailutasona pidetään uoman pohjaa. Avoimessa uomassa tämä merkitsee, että ominaisenergia on yksinkertaisesti vedensyvyyden ja nopeuskorkeuden summa

$$E = y + \frac{v^2}{2g} = y + \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (79)$$

Tasaisessa virtauksessa kokonaisenergia jatkuvasti putoaa, mutta ominaisenergia pysyy vakiona, koska syvyys ja nopeus pysyvät vakioina. Epätasaisessa virtauksessa ominaisenergia joko kasvaa tai vähenee.

Tarkastellaan seuraavassa ao. poikkileikkausta



Vedensyvyys on x ja virtaama q aika- ja leveysyksikköä koh-
ti. Nopeus tai keskinopeus on v . Tällöin on ilmeisesti

$$v = \frac{q}{x}$$

joka antaa ominaisenergialle

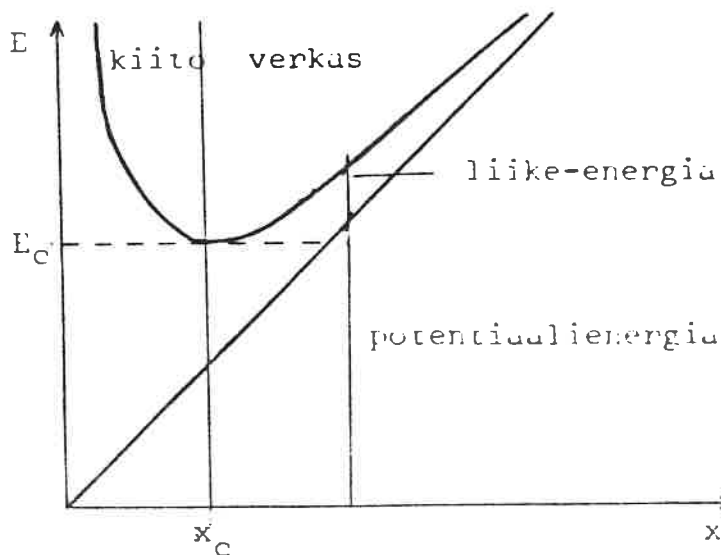
$$(a) \quad E = x + \frac{v^2}{2g} = x + \frac{q^2}{2gx^2}$$

Tässä yhtälössä on kolme muuttujaa, E , x ja q . Yhtälön
(a) fysikaalisen sisällön selvittämiseksi tarkastellaan
seuraavassa kahta tapausta

a. $q = \text{vakio}$, mutta E ja x muuttuvat

b. $E = \text{ " }, \text{ " } q \text{ " } x \text{ " }$

Tapaus a. Tarkastellaan E :tä funktiona x :stä ja piirretään
kuvaaja. Tämä saadaan helposti ja on seuraavan näköinen:



Kuvaajalla on kaksi asymptoottia: $E = x$ ja $x = 0$. Tutkitaan minimin esiintymispaikkaa. Derivoidaan (a)

$$\frac{dE}{dx} = 1 - \frac{q^2}{gx^3} = 0$$

josta (b)

$$x_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (80)$$

Tätä syvyyttä nimitetään kriittiseksi syvyydeksi, jota jo käsiteltiin edellä verkas- ja kiitovirtausta erotettaessa. Kullakin annetulla $E \neq E_{\min}$ on kaksi veden syvyyttä, joilla virtaus voi tapahtua: syvyys on suurempi kuin x_c ja syvyys on pienempi kuin x_c . Edellisessä tapauksessa liike on verkas- jälkimmäisessä kiitovirtausta.

Mikäli q eliminoidaan yhtälöstä (a) sijoittamalla (b), saadaan

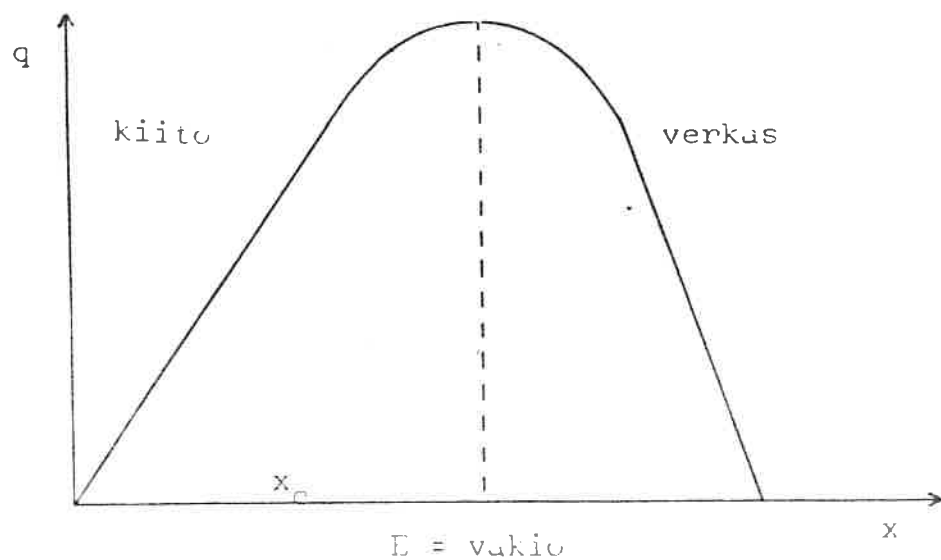
$$(c) \quad E_c = x_c + \frac{x_c}{2} = \frac{3}{2} x_c$$

b. E = vakio. Kirjoitetaan yhtälö (a) muotoon

$$q^2 = 2g(E \cdot x^2 - x^3) = 2gx^2(E - x)$$

$$\text{tai} \quad q = x\sqrt{2g(E - x)} \quad (81)$$

Piirretään tälle kuvaaja. Asymptootit puuttuvat



Derivoimalla löydetään $q_{\max}$:

$$\frac{dq}{dx} = \frac{-x}{2\sqrt{2g(E-x)}} + \sqrt{2g(E-x)} = 0$$

josta

$$(d) \quad x_c = \frac{2}{3} E \quad \text{sekä} \quad (82)$$

$$q_{\max} = \sqrt{gx_c^3} = \sqrt{g} \cdot x_c^{3/2} \quad (83)$$

Vertaamalla yhtälöitä (c) ja (d) havaitaan, että ominaisenergian minimi ja vedenjohtokyvyn maksimi saadaan kriittisellä syvyydellä x_c .

Kriittistä syvyyttä vastaava nopeus, kriittinen nopeus v_c , saadaan ilmaisusta

$$x_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (84)$$

kun sijoitetaan $q = v_c \cdot x_c$

$$v_c = \sqrt{g \cdot x_c} \quad (85)$$

Kun $v > v_c$ on virtaus kiitovirtausta ja kun $v < v_c$, on virtaus verkasvirtausta.

Jos yhtälö $v_c = \sqrt{g \cdot x_c}$ jaetaan $\sqrt{gx_c}$:llä, saadaan

$$1 = \frac{v_c}{\sqrt{gx_c}} \quad (86)$$

Nyt yhtälön oikea puoli = Frouden luku. Jos $F = 1$, on virtaus kriittisessä vaiheessa. Jos $F > 1$, on virtaus kiitovirtausta. Jos $F < 1$, on virtaus verkasvirtausta.

$\sqrt{gh}$ on likimäärin pinta-aallon etenemisnopeus uomassa.

Tämä seikka on otettava huomioon suoritettaessa padotuslaskelmia. Kiitovirtauksessa häiriön vaikutus ei tunnu vastavirtaan, joten padotuslaskelmat on suoritettava myötävirtaan. Verkasvirtauksissa sen sijaan laskelmat suori-

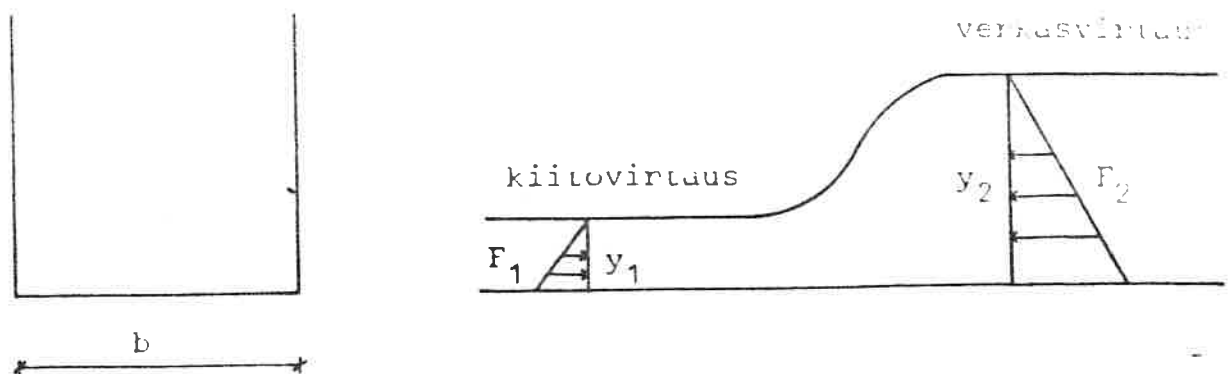
tetaan vastavirtaan.

Määräävä poikkileikkaus

Sitä kohtaa vesiuomassa, jossa verkkasvirtaus muuttuu kiitovirtaukseksi, nimitetään määrääväksi poikkileikkaukseksi.

6.6 Vesikynnys

Kiitovirtauksen muuttuessa verkkasvirtaukseksi energiaa muuttuu lämmöksi. Jos energiaero on suuri, muodostuu täydellinen vesikynnys. Vedenpinnan korkeuden muutosta voidaan tarkastella impulssilauseen ja jatkuvuusehdon avulla. Johdetaan seuraavaksi ns. Unwinin kaava suorakaiteen muotoiselle poikkileikkaukselle.



$$\rho Q (v_2 - v_1) = \Sigma F$$

$$F_1 = \frac{1}{2} \gamma \cdot b \cdot y_1^2$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \gamma \cdot b \cdot y_2^2$$

$$\rho Q (v_2 - v_1) = \frac{1}{2} \gamma b (y_1^2 - y_2^2)$$

Jatkuvuusyhtälöstä

$$v_1 y_1 b_1 = v_2 y_2 b_2$$

jolloin saadaan muoto

$$\rho v_1 y_1 b \left[v_1 \left(\frac{y_1}{y_2} - 1 \right) \right] = \frac{1}{2} \gamma b (y_1^2 - y_2^2)$$

josta edelleen

$$y_2^2 + y_1 y_2 - 2 \frac{\rho}{\gamma} v_1^2 y_1 = 0 \quad (\gamma = \rho \cdot g)$$

josta saadaan y_2 ratkaistuksi

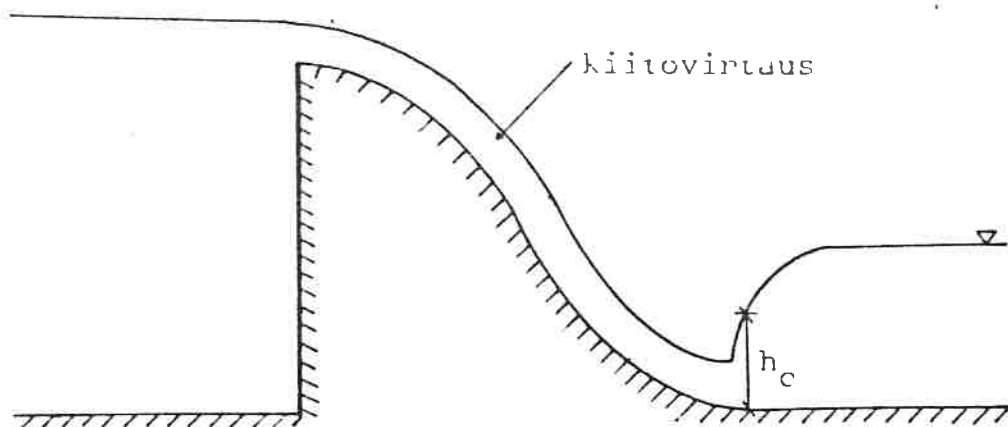
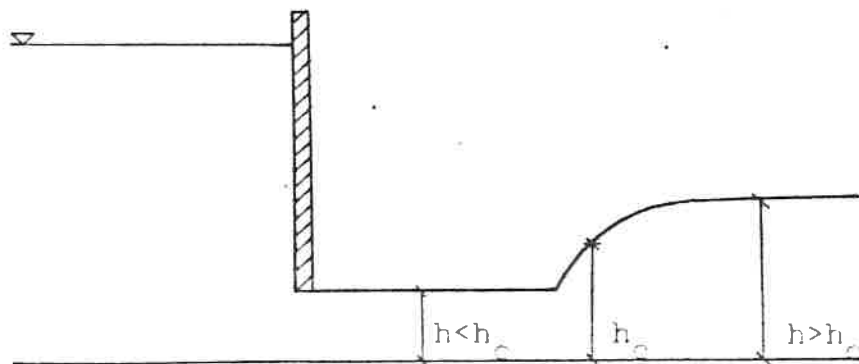
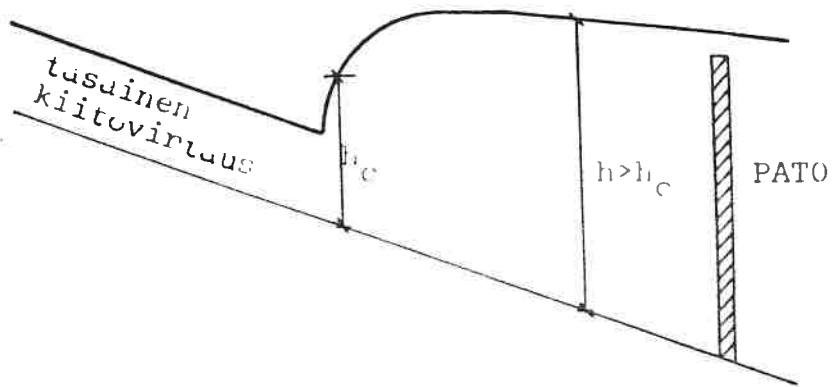
$$y_2 = - \frac{y_1}{2} \left(\pm \sqrt{\frac{y_1^2}{4} + \frac{2v_1^2 y_1}{g}} \right) \quad (87) \text{ UNWININ KAAVA}$$

Energiahäviö voidaan laskea Bernoullin yhtälöstä

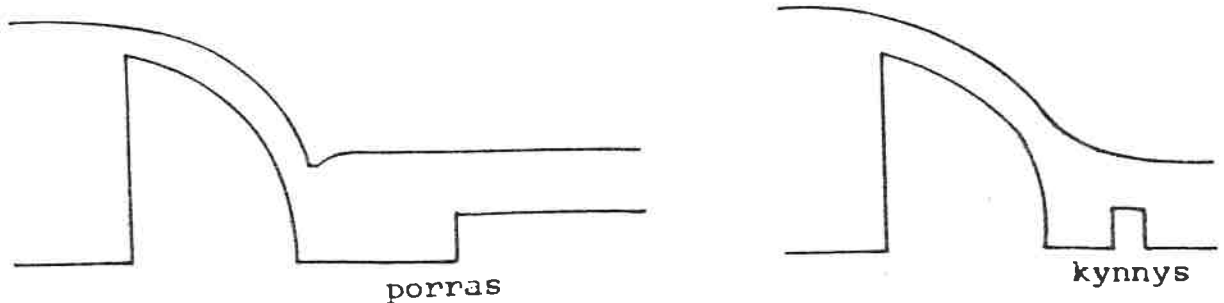
$$h_f = \left(\frac{v_1^2}{2g} + y_1 \right) - \left(\frac{v_2^2}{2g} + y_2 \right) \quad (88)$$

Yleensä, kun virtaus on erittäin epätasaista, käytetään impulssilausetta. Mikäli taas energiahäviöt ovat pienehköt ja energiaviivan kaltevuus on vain vähän poikkeava vedenpinnan kaltevuudesta, sanotaan virtausta lievästi epätasaiseksi ja sitä voidaan tutkia tasaiselle virtaukselle johdetuin menetelmin.

Erilaisia tilanteita, joissa vesikynnys voi sattua:



Jos ylisyöksen alapuolelle syntyy ns. siirtynyt vesikynnys, on alaveden pintaa syöpymisvaaran takia pyrittävä nostamaan rakentamalla esteporras tai estekynnys.



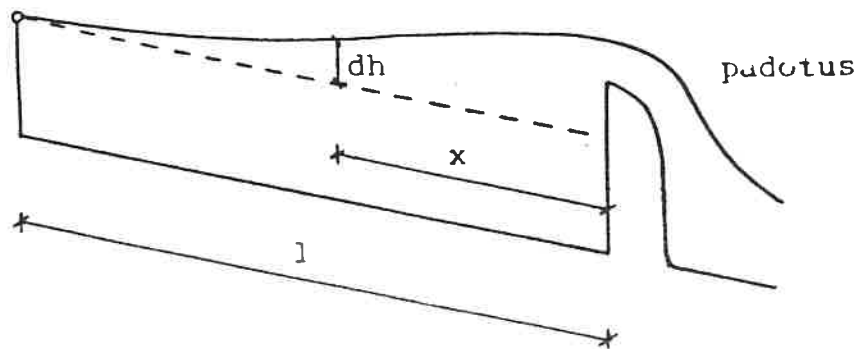
6.7 Epätasainen liike

6.7.1 Padotus ja alennus

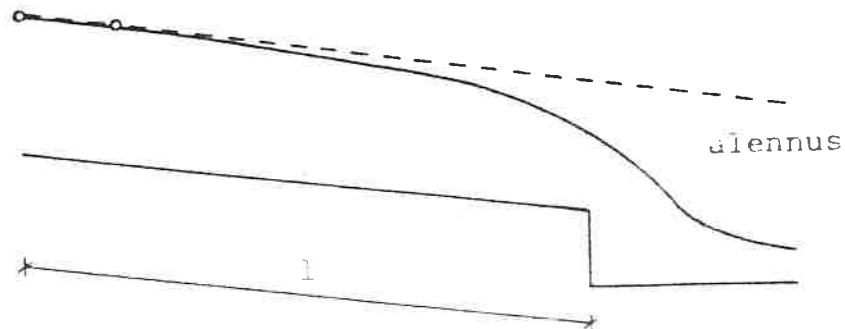
Vapaan vedenpinnan olemassaolo tietää sitä, että avouomassa syvyys (etenkin luonnonuomassa) vaihtelee. Tämä aiheuttaa epätasaisen virtauksen (huom! virtaus voi muuten olla stationääristä), jossa hidastumiset ja kiihtymiset seuraavat toisiaan. Mikäli virtausnopeus v kasvaa ja poikkileikkauksen ala pienenee alapuolelle päin, sanotaan ilmiötä alennukseksi. Päinvastaisessa tapauksessa puhutaan padotuksesta.

Mikäli rakennetaan pato, vedenpinta kohoaa. Vesisyvyys ja veden poikkileikkaus kasvaa ja kun Q pysyy vakiona,

liike häiriytyy ja muuttuu epätasaiseksi - syntyy padotus.



Mikäli uoman pohjaan taas tehdään kynnys, vedenpinta laskee ja syntyy alennus.



Eräänä epätasaisen liikkeen päätehtävänä on padotus- ja alennuskäyrien muodon ja pituuden määrittäminen. Ts. selvitetään, kuinka dh muuttuu, kun x muuttuu.

6.7.2 Epätasainen liike luonnonuomissa

Vaikka epätasaisen liikkeen laskemisen osaaminen tekouomissa on tärkeää, on käytännössä esiintyvä ongelma yleensä sellainen, että laskelmat on suoritettava luonnonuomiin. Vesistöön rakentaminen ja perkaaminen saattavat aiheuttaa varsin tuntuvia muutoksia vedenkorkeuksiin, joten näiden vaikutusten suuruus on ennakolta pystyttävä määräämään. Ts. on pyrittävä määräämään padotuksen ja alennuksen etäisyys ja muoto.

Laskelmia varten on oltava mahdollisimman täydelliset tiedot uomasta tai vesistöstä:

- pituusleikkaus
- poikkileikkauksia
- vedenkorkeuksien ja virtaamien vuorosuhdetiedot

Tekouomiin verrattuna luonnonuomien laskeminen on vaikeampaa seuraavista syistä:

- poikkileikkaus vaihtelee
- pohjankaltevuus "
- muutokset ovat säännöttömiä

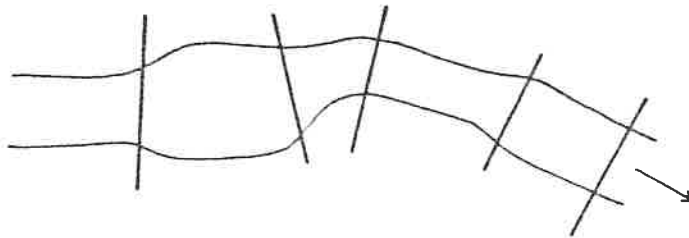
Laskelmien kulku

Jaetaan luonnonuoma osiin siten, että kullakin osalla uoman hydrauliset tekijät eli:

- vedensyvyys
- vedenpinnan leveys

- vedenpinnan kaltevuus
- poikkileikkaus
- karkeus
- vesimäärä

pysyvät samoina tai sellaisina, että niiden muutos on jollakin tavoin säännönmukainen.

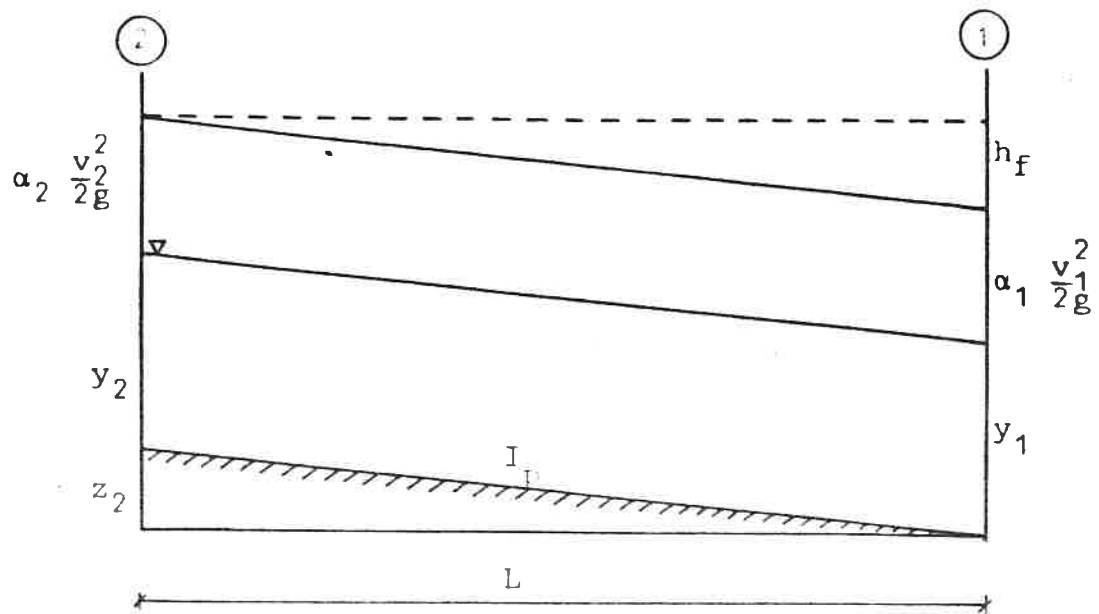


Kitkan aiheuttama putoushäviö lasketaan kullakin jaksolla samoin kuin tasaisessa liikkeessä. Mikäli käytetään Manningin kaavaa, on

$$h_f = \frac{LQ^2}{M^2 A_m^2 R_m^{4/3}} \quad (89)$$

kun A_m ja R_m ovat jakson keskimääräiset arvot

Kitkahäviön kaavassa karkeus korotetaan neliöön = kertoi-
men valintaan kiinnitettävä kovasti huomiota.



$$z_2 = I_p L$$

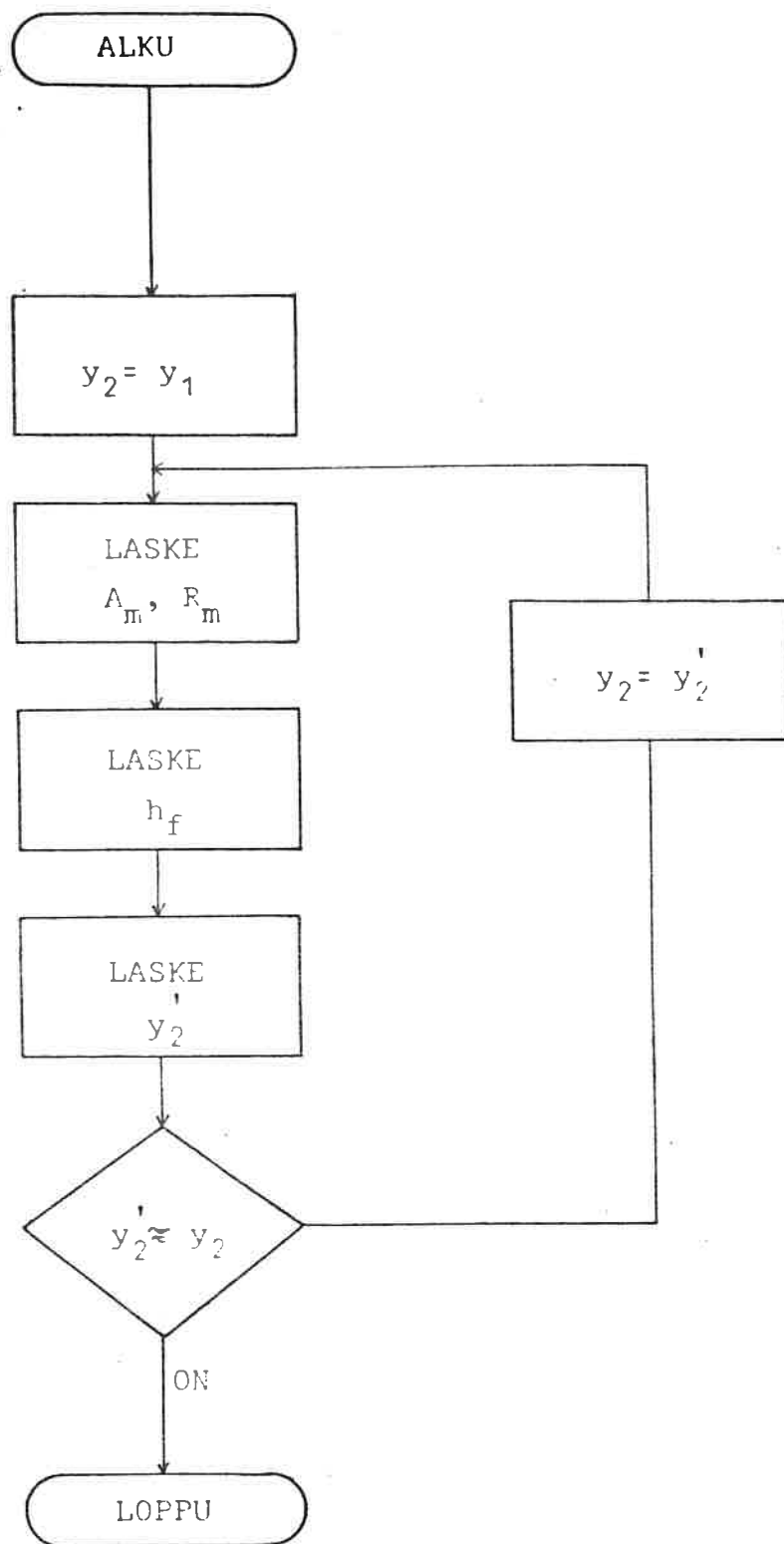
$$\text{Bernoulli: } y_2 + z_2 + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} = y_1 + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + h_f$$

$$y_2 = y_1 - I_p \cdot L + \alpha \left(\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} \right) + h_f \quad (90)$$

Mikäli virtaus hidastuu, käy kaava epätarkaksi. Parempaan tulokseen päästään yleensä kaavalla:

$$y_2 = y_1 - I_p L + h_f \quad (91)$$

Lamelli



Esimerkki. Poikkileikkauksena suorakaide

$$\begin{aligned}\alpha &= 1,2 & y_1 &= 2,50 \text{ m} \\ Q &= 30 \text{ m}^3/\text{s} & b &= 10 \text{ m} \\ M &= 25 & z_2 &= 0,70 \text{ m} \\ L &= 700 \text{ m}\end{aligned}$$

$$A_m = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$$

$$R_m = \frac{A_m}{p_m} \quad \frac{\Delta v^2}{2g} = \alpha \left(\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} \right)$$

Laskelmat suoritetaan taulukkomuodossa

$$h_f = \frac{LQ^2}{M^2 A_m^2 R_m^{4/3}}$$

PL n:o	y m	L m	A m ²	$\frac{v^2}{2g}$	$\Delta \frac{v^2}{2g}$	A _m m ²	p _m m	R _m m	M	h _f	y ₂ '
1	2.5	700	25	0.073							
2	2.5	700	25	0.073	0	25	15	1.67	25	0.81	2.61
2	2.61		26.1	0.067	0.008	25.6	15.2	1.68		0.77	2.58
2	2.58		25.8	0.069	0.004	25.4	15.2	1.67		0.78	2.59

Siirrytään seuraavaan lamelliin.

Verkasvirtauksessa (kun $F < 1$) laskelmat alhaalta ylöspäin.

Kiitovirtauksessa ylhäältä alaspäin.

Jaksojen pituus tulisi olla $< 500 \text{ m}$.

6.7.3 Epätasainen liike tekouomissa

Ongelman ratkaisemiseksi on esitetty lukuisia likimääräisiä ratkaisutapoja, joissa useimmissa uoman poikkileikkaus ajatellaan korvatuksi jollakin säännöllisellä poikkileikkauksella.

Dupuit, Rühlman, Bresse käyttivät leveätä suorakaidetta.

Tolkmitt käytti paraabelia (leveätä).

Eri menetelmiä varten on olemassa valmiiksi laskettuja taulukoita, mutta niillä ei monestikaan päästä kovin tarkkoihin tuloksiin.

Viitataan Hosian kirjoitukseen (RIL, Vesirakennus), jossa on esitetty Rühlmannin käyriä.

6.8 Paikallishäviöt

Avouomavirtauksen paikallishäviöitä laskettaessa voidaan lähteä liikkeelle kaavasta

$$h_p = \xi \frac{v^2}{2g} \quad (92)$$

Tarkemmin kts. Press-Schröder: Hydromechanik im Wasserbau.

Silta-aukon aiheuttama padotus

Useita eri menetelmiä, joista tunnetuimmat ovat

Rehbock

Bradley

Ven Te Chow

Suomessa Seuna kehittänyt ns. K-menetelmän, joka läheisesti muistuttaa Tolkmittin menetelmää.

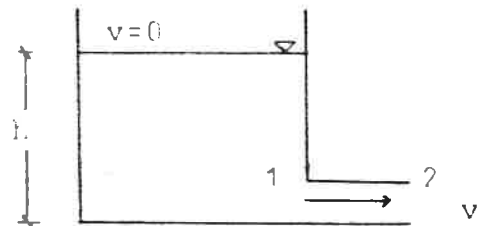
Menetelmiin liittyvät nomogrammit, joiden perusteella kertoimet määrätään.

6.9 Purkautuminen

Pieni aukko

Torricellin laki

$$v = \sqrt{2gh} \quad (93)$$



Muodostetaan Bernoullin yhtälö kohdissa 1 ja 2

$$v_1 = 0$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + h = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}$$

$$v_2 = \sqrt{0 + 2g(h + \frac{p_1 - p_2}{\gamma})}$$

$$\text{Joten} \quad v_2 = \sqrt{2g(h - \frac{p_2 - p_1}{\gamma})} \quad (94)$$

$$\text{Yleensä} \quad p_2 = p_1 \quad \therefore \quad v = \sqrt{2gh}$$

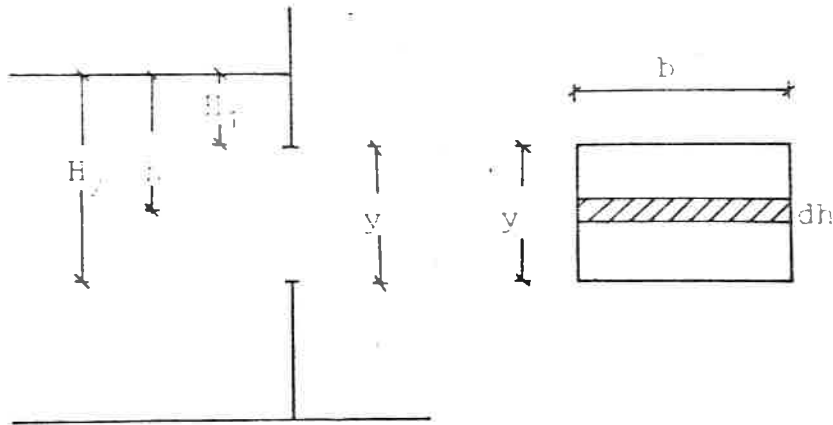
Todellisuudessa nestesuihku kuristuu, jolloin sen poikkeileikkaus tulee pienemmäksi. Kun vielä kitkan vaikutus otetaan huomioon, saadaan aukosta ulos purkaantuvaksi nestemääräksi

$$Q = \mu A \sqrt{2gh} \quad (95)$$

jossa μ on ulosvirtauskerroin.

SUURI AUKKO

Poleni 1717 kiinnitti huomiota siihen, että aukon ollessa suuri ei voida painekorkeudeksi ottaa aukon painopisteen etäisyyttä vedenpinnasta, vaan on otettava huomioon painekorkeuden vaihtelu aukon eri pisteissä.



dh :n kautta purkautuu dQ'

$$dQ' = b \cdot dh \sqrt{2gH}$$

Aukon kautta purkautuva koko vesimäärä saadaan integroimalla:

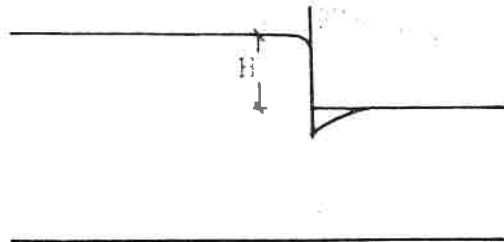
$$Q' = \int_{H_1}^{H_2} b \sqrt{2gh} \, dh \quad \therefore$$

$$Q' = \frac{2}{3} \cdot b \cdot \sqrt{2g} (H_2^{3/2} - H_1^{3/2}) \quad (96)$$

Otetaan purkautumiskerroin huomioon

$$Q = \mu \cdot Q' = \frac{2}{3} \mu \cdot b \sqrt{2g} (H_2^{3/2} - H_1^{3/2}) \quad (97)$$

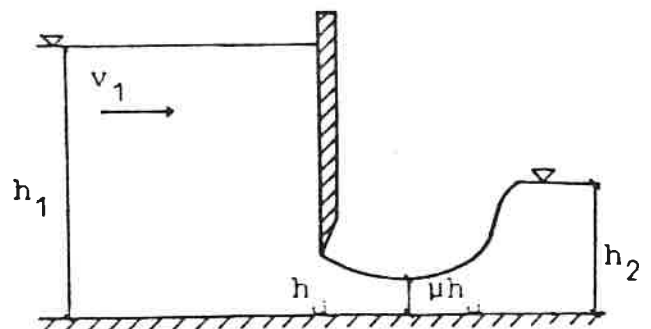
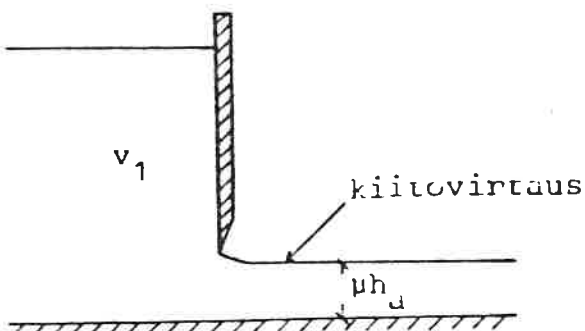
Jos vesi purkautuu paineen alaiseen tilaan esim. silloin, kun aukko ulkopuoleltakin on kokonaisuudessaan vedenpinnan alapuolella, on painekorkeus vedenpintojen korkeusero.



Ulosvirtauskerroimet μ saadaan kokeellisesti. Kertoimia löytyy käsikirjoista.

POHJA-AUKOT

Täydellinen purkautuminen tapahtuu silloin, kun alaveden korkeus ei vaikuta virtaamaan

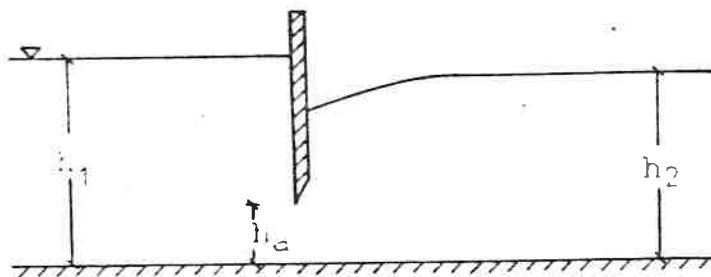


Virtaama voidaan laskea kaavasta

$$Q = \mu \cdot h_a \cdot b \sqrt{2g(h_1 + \frac{v_1^2}{2g} - \mu \cdot h_a)} \quad (98)$$

Terävsärmäiselle luukulle $\mu = 0.60$.

Epätäydellinen purkautuminen tapahtuu silloin, kun alapuolinen vesi vaikuttaa purkautumiseen

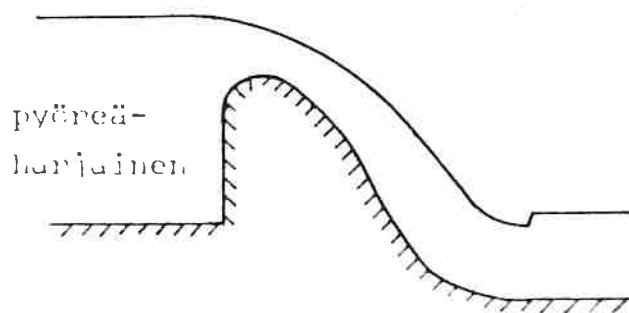
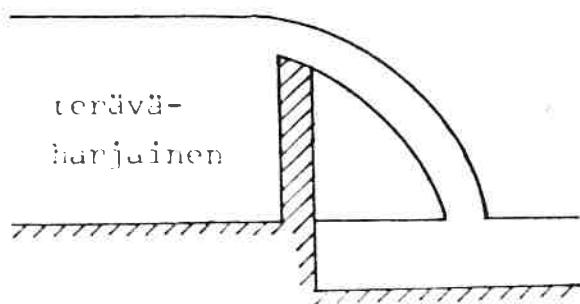


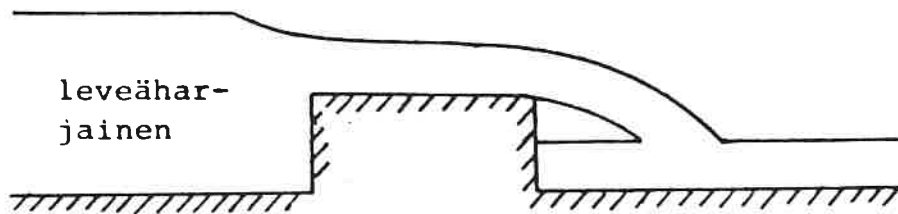
$$Q = \mu' h_a \cdot b \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \quad (99)$$

YLISYÖKSYPADOT

Veden varastoimiseksi ym. tarkoituksia varten rakennetaan luonnonuomiin patoja, jotka kohottavat vedenpintaa yläaltaassa. Yläaltaan täytyttyä kohoaa vedenpinta padon harjan yläpuolelle, kunnes vesi syöksyy padon yli ala-altaaseen. Tällaista patoa nimitetään ylisyoäksypadoksi. Padot voidaan jakaa

PADON HARJAN MUODON MUKAAN

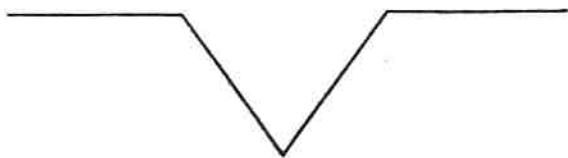
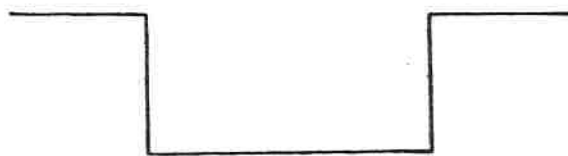




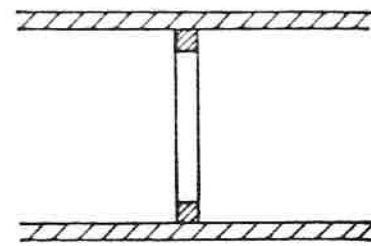
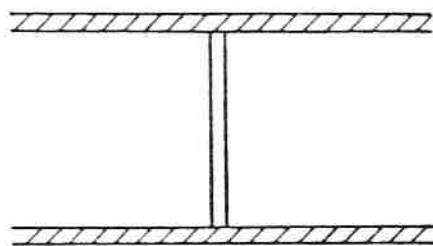
ALAVEDEN PINNAN KORKEUDEN MUKAAN

1. Pintapadot: alaveden pinta harjan alapuolella
2. Pohjapadot: " " " yläpuolella

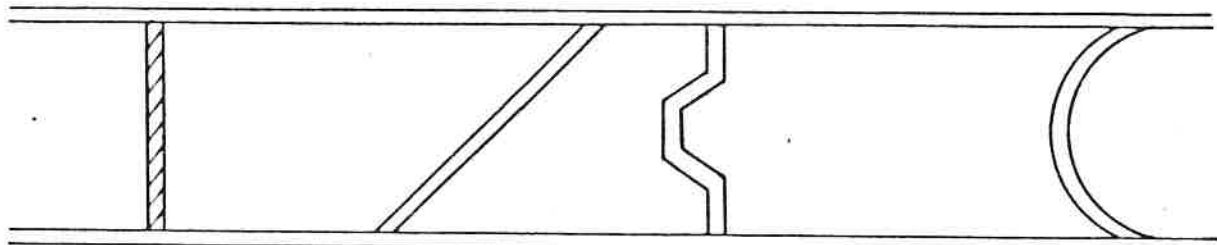
PATOAUKON MUODON MUKAAN



PATOAUKON SIJOITUKSEN MUKAAN



PADON SIJOITUKSEN MUKAAN



kohtisuorassa virtausta vastaan

vinossa virtaukseen nähden

taitteinen

kaareva

Täydellisessä ylisyoökyssä Q voidaan laskea Weisbachin patokaavalla

$$Q = \frac{2}{3} \mu \cdot b \sqrt{2g} \left[\left(h + \frac{v^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{v^2}{2g} \right)^{3/2} \right] \quad (100)$$

μ = purkautumiskerroin

b = padon harjan pituus kohtisuoraan virtaus-
suuntaa vastaan

h = yläveden korkeus padon harjan tasosta lukien

v = virtausnopeus padon yläpuolella

Jos v on pieni, käytetään Polenin kaavaa

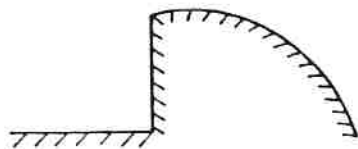
$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} h^{3/2} \quad (101)$$

μ :n arvoille on käsikirjoissa tietoja.

HARJAPYÖRISTYKSEN MÄÄRÄÄMINEN

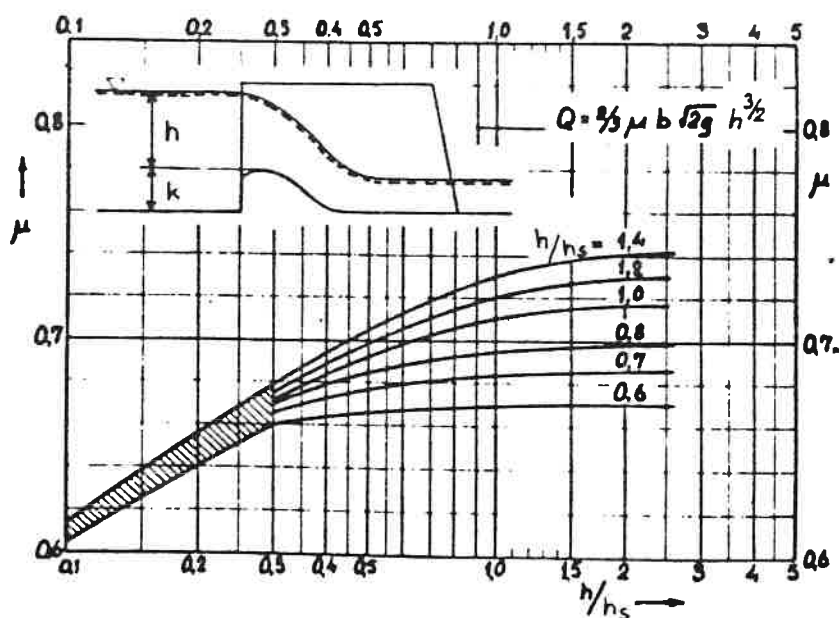
Pyöröharjaisen padon harjan muoto pyritään määräämään

1. sellaiseksi, että padon vesimäärä (mikäli siihen harjan muodolla voidaan vaikuttaa) tulisi mahdollisimman suureksi.



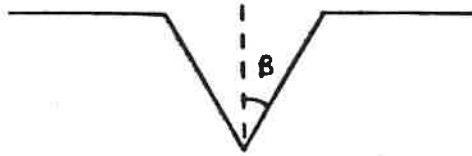
2. Harja pyritään myös tekemään sellaiseksi, ettei vesisuihku pääse irtaantumaan padon pinnasta ja että erittäin haitallisen ilmatilan muodostuminen ylisyoösyn ja padon pinnan väliin varmasti estetään. Toisin sanoen padon harja on muodostettava mahdollisimman hyvin ylisyoösyn muotoa myötäileväksi.
3. Harjapyörityksen määräämistä helpottaa se kokeellisesti todettu seikka, ettei ylisyoösyn muoto juuri muutu painekorkeuden vaihdellessa. Täten ovat siis ylisyoösyn alapinnan koordinaatit lausuttuina painekorkeuden H funktioina likipitään vakioita. Tähän seikkaan perustuvatkin ne monet menetelmät, joita padon harjan muotoilemiseksi on esitetty.

Tunnetuimpia menetelmiä on Graegerin koordinaattimenetelmä.



Eri muotoisten patoaukkojen virtaamia

1. Kolmio



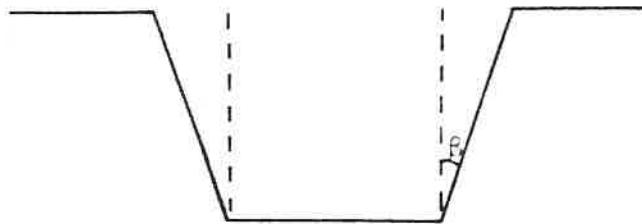
$$Q = \frac{8}{15} \cdot \mu \cdot \tan \beta \sqrt{2g} H^{5/2} \quad (102)$$

Jos $2\beta = 90^\circ$, sanotaan patoa Thompsonin padoksi, jolloin välillä $H = 0.05 \dots 0.55$ m saadaan

$$Q = 1.343 \cdot H^{2.47} \quad (103)$$

Huomaa, että mittaustarkoituksiin patoa käytettäessä on $v:n$ oltava = 0.

2. Puolisuunnikas



$$Q = \underbrace{\frac{2}{3} \mu_1 \cdot b \sqrt{2g} H^{3/2}}_{\text{suorakaide}} + \underbrace{\frac{8}{15} \mu_2 \tan \beta \sqrt{2g} H^{5/2}}_{\text{kolmiot}} \quad (104)$$

Kun $\tan \beta = 1/4$, nimitetään kaavaa CIPOLLETTIN kaavaksi, jolloin virtaama voidaan laskea kaavalla

$$Q = 1.865 \cdot b \cdot H^{3/2} \quad (105)$$

3. Paraabeli (Greven kaava)

$$Q = k \cdot H^2 \quad (106)$$

$$k = 0,293 \cdot p^{0,488}$$

jossa p = parametri paraabelin yhtälössä

$$x^2 = 2py$$

POHJAPADOT (Epätäydellinen ylisyöksy)

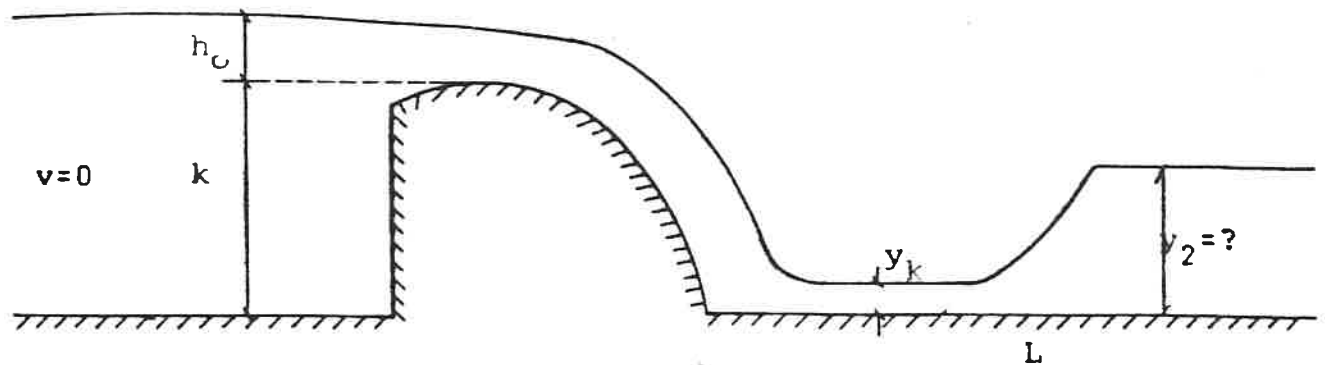
Pohjapadoissa alavedenpinta on korkeammalla kuin padon harja. Virtaama lasketaan ylisyöksyn kaavoilla ottamalla mukaan korjauskerroin κ eli

$$Q_{\text{epät.}} = \kappa Q_{\text{täyd.}} \quad (107)$$

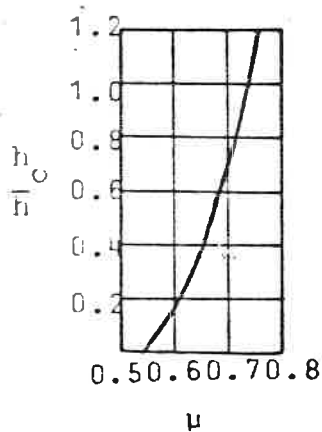
Alavesi ei paljoa vaikuta, mikäli padon harjalla on kiitovirtaus ja alapuolella syntyy vesikynnys. Tämä edellyttää, että

$$h_2 < 0,7 h_1$$

Esimerkki Laske kuvan padon purkautumiskäyrä metrin välein välille $h_o = 0 \dots 6.0$ m. Pato on suunniteltu painekorkeudelle $h = 5$ m. Padon harjan korkeus on $k = 10$ m. Arvioi lisäksi y_k ja y_2 sekä L suurimmalla virtaaman arvolla. Padon pinnan kitkaa ei tarvitse ottaa huomioon. (Laske virtaama padon leveysmetriä kohden).



Polen: $Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} h_o^{3/2}$



h_o	h_o/h	μ	Q
0	0	-	0
1	0.2	0.59	1.74
2	0.4	0.64	5.35
3	0.6	0.68	10.43
4	0.8	0.72	17.01
5	1.0	0.74	24.43
6	1.2	0.76	32.98

y_k :n laskenta:

Bernoulli: $\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$

$v_1 = 0$

$v_2 = \frac{Q}{A} = \frac{32.98}{1 \cdot y_k}$



$$10 + 6 = y_k + \left(\frac{32.98}{y_k} \right)^2 \cdot \frac{1}{2g}$$

$$y_k + \frac{32.98^2}{y_k^2 \cdot 2g} = 16 \Rightarrow \underline{y_k = 1.99 \text{ m}}$$

y_2 Unwinin kaavalla

$$y_2 = -\frac{y_k}{2} + \sqrt{\frac{y_k^2}{4} + \frac{2y_k v_k^2}{g}}$$

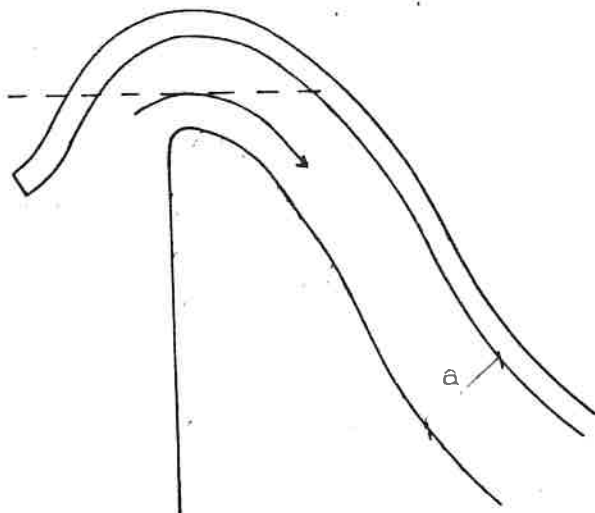
$$v_k = 16.6 \text{ m/s}$$

$$\underline{y_2 = 9.63 \text{ m}}$$

L Pawlowskin kaavalla

$$L = 2.5(1.9y_2 - y_k) = \underline{41 \text{ m}}$$

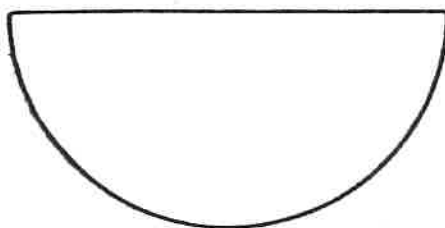
LAPPO



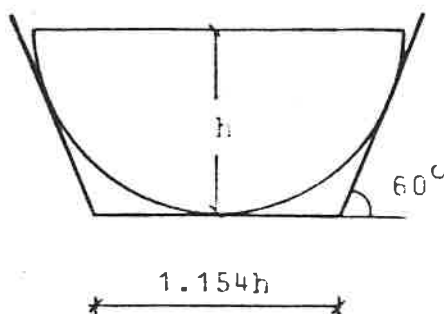
$$Q = \mu \cdot b \cdot \sqrt{2gh} \quad (107)$$

6.10 Uoman poikkileikkauksen suunnittelu

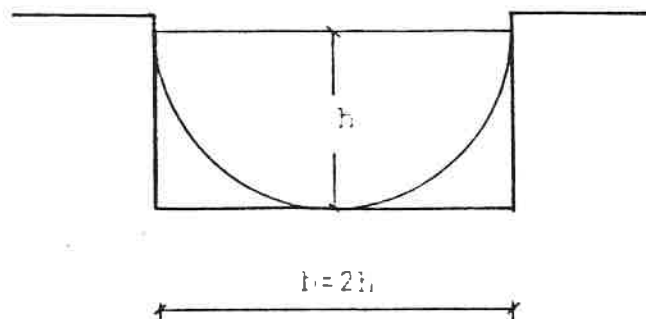
Hydraulisesti edullisin uoman muoto on puolilympyrä, jossa vedenpinta yhtyy halkaisijaan.



Mikäli käytetään puolisuunnikaspoikkileikkausta, on hydraulisesti edullisin sellainen, jossa luiskan kaltevuuskulma on 60° .



Mikäli taas käytetään suorakaidetta:



Pienissä uomissa voidaan päästä suhteellisen hyvään tulokseen ilman, että tarvitsee pelätä luiskien sortuvan.

7. PIENOISMALLIT

Yleensä suurien vesirakenteiden yhteydessä teoreettisella tarkastelulla ei saada hydraulisia ongelmia riittävästi ratkaistuksi, vaan joudutaan turvautumaan mallikokeisiin. Millä tavoin malli on tehtävä, että siitä saatuja tuloksia voitaisiin soveltaa prototyyppiin?

1. Pienoismallin on oltava geometrisesti yhdenmuotoinen alkuperäisen rakenteen kanssa. Jos l_m on pituus mallissa ja l prototyyppissä, niin

$$\frac{l_m}{l} = \frac{1}{\lambda} \quad (a)$$

2. Toinen vaatimus on mallin aikamittakaavasta (nestepartikkelien kulkemat ajat ovat vakiosuhteessa mallissa ja prototyyppissä) kinemaattinen samankaltaisuus

$$\frac{T_m}{T} = \frac{1}{\tau} \quad (b)$$

Veden nopeus on matka jaettuna ajalla. Nopeusmittakaava on näin ollen

$$\frac{v_m}{v} = \frac{l_m/T_m}{l/T} = \frac{\tau}{\lambda} \quad (c)$$

Virtaama saadaan, kun (pituus)³ jaetaan ajalla, eli

$$\frac{Q_m}{Q} = \frac{l_m^3/T_m}{l^3/T} = \frac{\tau}{\lambda^3} \quad (d)$$

3. Virtaamatapahtuman (dynaaminen) samankaltaisuuden vaatimus edellyttää, että yhtälö

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

täytetään ja että suhde pysyy samana:

$$\frac{F_m}{F} = \frac{m_m \cdot a_m}{m \cdot a} \quad (e)$$

Mikäli mallissa ja prototyypissä on avoimet vesipinnat, voidaan osoittaa, että dynaaminen samankaltaisuus saavutetaan, kun Frouden luvut ovat yhtä suuret mallissa ja prototyypissä.

$$F = \frac{v_m}{\sqrt{g \cdot l_m}} = \frac{v}{\sqrt{g \cdot l}} \quad (f)$$

Yhtälöstä (f) saadaan mallin nopeusmittakaavaksi

$$\frac{v_m}{v} = \sqrt{\frac{l_m}{l}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (g)$$

Yhtälöiden (c) ja (g) avulla saadaan mallin aikamittakaavaksi:

$$\frac{T_m}{T} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (h)$$

Virtaamamittakaavaksi saadaan yhtälön (d) avulla

$$\frac{Q_m}{Q} = \frac{1}{\lambda^{5/2}} \quad (i)$$

Mikäli veden liike tapahtuu suljetuissa johdoissa, saavutetaan dynaaminen samankaltaisuus, mikäli Reynoldsin luku Re on sama mallissa ja prototyypissä.

$$Re = \frac{v_m D_m}{\nu} = \frac{v \cdot D}{\nu}$$

Tällöin mallin nopeus-, aika- ja virtaamamittakaavoiksi saadaan:

$$\frac{v_m}{v} = \lambda$$

$$\frac{T_m}{T} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\frac{Q_m}{Q} = \frac{1}{\lambda}$$

Myös muita ehtoja on yleensä täytettävä, ennen kuin mallin antamia tuloksia voidaan soveltaa: Avovesipintaisessa mallissa ei virtaus mallissa saa olla laminaaria, jos se originaalissa on turbulenttista, kitkahäviöt on "justeerattava" saman suuruiseksi jne.

Esimerkki: Rakennetaan jokeen voimala ja tätä varten malli, jonka mittakaavaksi (pituus) valitaan 1:60

- a) Kuinka paljon vettä mallissa tulisi virrata, jotta vesimäärä vastaisi originaalia $2\,000\text{ m}^3/\text{s}$.
- b) Jos mallissa mitataan nopeus 0.30 m/s , niin kuinka on vastaava nopeus originaalissa.

Ratkaisu: Vapaat vedenpinnat $\Rightarrow$ Frouden luku yhtä suuri.

Kun $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{60}$, saadaan

$$\text{nopeusmittakaavaksi} \quad \frac{v_m}{v} = \frac{1}{\sqrt{60}} = \frac{1}{7.75}$$

$$\text{virtaama} \quad " \quad \frac{Q_m}{Q} = \frac{1}{60^{5/2}} = \frac{1}{27\,885}$$

Näin ollen $Q = 2\,000\text{ m}^3/\text{s}$ originaalissa vastaa

mallissa $Q_m = \frac{2\,000}{27\,885} = 0.072\text{ m}^3/\text{s}$ ja $v_m = 0.30\text{ m/s}$

mallissa vastaa $7.75 \cdot 0.30\text{ m/s} = 2.33\text{ m/s}$ originaalissa.