

**Vakkilainen P. (1979) Vesivarojen suunnittelun perusteita.
Luentosarja Oulun yliopistossa. 85 s.**

VESIVAROJEN SUUNNITTELU

PERTTI VAKKILAINEN

SISÄLLYSLUETTELO

1. MALLIT HYDROLOGIASSA.	1
1.1 Mallien luokittelu	1
1.11 Fysikaaliset mallit	2
1.12 Analogia-mallit	2
1.13 Matemaattiset mallit	3
2. ALLASSUUNNITTELUN HYDROLOGISIA PERUSTEITA	8
2.1 Tulovirtaamatietojen hankinta	8
2.2 Keskeisiä tunnuslukuja	8
2.3 Toistuvuustekijä	15
2.4 Alivalumat	16
3. VESIHUOLTOALTAAN MITOITUS	20
3.1 Menetelmät, jotka indikoivat altaan täyttöastetta	20
3.11 Summakäyrämenetelmä	20
3.12 Jäännössummakäyrämenetelmä	21
3.13 Analyyttinen menetelmä	22
3.14 Puoliäärettömän altaan menetelmä	24
3.2 Menetelmät, jotka perustuvat valiteltuvälin käyttöön	25
3.21 Hurst'in menetelmä	26
3.22 Thomas - Fiering algoritmi	27
3.3 Menetelmät, jotka perustuvat alivirtaamajaksojen tarkasteluun	29
3.31 Minimivirtaamamenetelmä	29
3.32 Alexander'in menetelmä	29
3.33 Dincer'in menetelmä	32
3.34 Gould'in menetelmä	33
3.35 Alivirtaamien toistuvuusanalyysiin perustuva menetelmä	35
3.4 Menetelmien arviointi	37
4. STOKASTINEN VARASTOTEORIA	38
4.1 Yksinkertainen "mutually exclusive"-malli	39
4.2 Yksinkertainen "simultaneous"-malli	42
4.3 Gould'in todennäköisyysmatriisimenetelmä	43
5. TULVA-ALTAAN MITOITUS	48
5.1 Mitoitustulvan laskentamahdollisuudet	48
5.2 Altaan mitoitus	51

6. VIRTAAMATIETOJEN GENEROINTI	55
6.1 Markov-malli vuosivalumille	55
6.2 Thomas - Fiering-malli kuukausivalumille	56
6.21 t_i :n muuntaminen	57
6.22 Matalas'in menetelmä	58
6.23 Virtaamien normalisointi	61
6.3 Kaksirivimalli	62
7. OPTIMOINTIOPIN PERUSTEITA	64
7.1 Matemaattinen optimointi	64
7.11 Lineaarinen optimointi	68
7.12 Dynaaminen optimointi	72
8. EDULLISUUSVERTAILU MONITAVOITTEISESSA SUUNNITTELUSSA	77
8.1 Edullisuusvertailun luonne	77
8.2 Perustaulukkovalinta	77
8.3 Päätösmatriisi	78
8.4 Relevanssipuu	80
8.5 Hyvyys - nettokustannusanalyysi	81
8.6 Minimaxi -valinta	81

1. MALLIT HYDROLOGIASSA

Mikä on malli?

Mallilla tarkoitetaan luonnossa tapahtuvan fysikaalisen prosessin jäljittelyä. Ko. fysikaalisen prosessin kuvaus voi tapahtua matemaattisin merkein tai fysikaalisella (pienois-) mallilla tai jollakin toisella fysikaalisella prosessilla.

1.1 Mallien luokittelu

Luokittelua voidaan pitää lähinnä akateemisena kysymyksenä. Kuitenkin varsin moni hydrologi on tuntenut pakottavaa tarvetta oman luokituksensa esittämiseen. Esimerkkinä käy Nemec'in luokittelu:

- I Fysikaaliset: (a) mittakaavamallit (sadannan simulaattori + pienoismalli valuma-alueesta)
- (b) verifiointimallit (sadannan simulaattori + valuntapinta)
- II Analogia: (a) Sähköinen pseudoanalogia (RC-elementeillä ratkaistaan lineaarisia tai epälineaarisia systeemejä)
- (b) hydrologisen kierron "maavaiheen" kokonaiskuvaus sähköistä analogiaa käyttäen.
- III Matemaattinen: (a) Monimuuttujamallit
- (b) Systeemimallit
- (c) Hydrauliset mallit (pintavalunta, uomavirtaus)
- (d) Konseptuaaliset mallit

Mallit eivät monestikaan kuulu puhtaasti johonkin em. ryhmään, vaan esimerkiksi konseptuaaliset mallit sisältävät useasti hydraulisen mallin, systeemimallin jne.

Mallien tarkoitus

- (a) mitoitus
- (b) operointi
- (c) havaintojen täydentäminen
- (d) ihmisen toimenpiteiden vaikutuksen arviointi
- (e) perustutkimus

1.11 FYSIKAALISET MALLIT

Kolme osaa:

- (a) sadannan simulaattori
- (b) valuntapinta
- (c) mittausvälineistö

Mikäli kyseessä on pienoismalli, on selvitettävä mallin ja prototyypin vastaavuus (dimensioanalyysi, Π -teoreema). Toimivaa mallia ei ole vielä onnistuttu rakentamaan.

Fysikaaliset mallit ovat osoittautuneet hyödyllisiksi matemaattisia malleja testattaessa.

1.12 ANALOGIA-MALLIT

Sähköistä analogiaa käytetään valuma-alueella tapahtuvan varastoitumisen kuvaamiseen. Pseudoanalogiset mallit ovat sellaisia, joissa on useita 2C-elementtejä, jotka voivat olla analogiakoneen osana tai erityisesti tehtävän ratkaisua varten rakennettuja.

Analogia perustuu yhtälöihin

$$\text{Hydrologia} \\ I = O + \frac{dS}{dt}; S = k \cdot O$$

I = tulovirtaama

O = menovirtaama

S = varastoituminen

$$\text{Sähköoppi} \\ E = V + RC \frac{dV}{dt}; S = RCV$$

E = tulojännite

V = menojännite

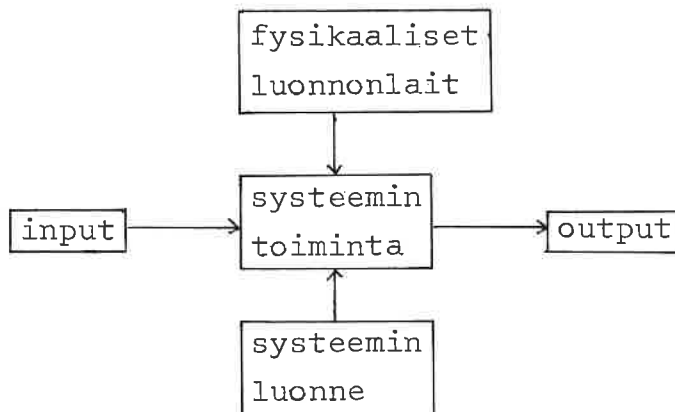
R = vastus

C = kapasitanssi

Sähköisen analogiaa on käytetty vesistön säännöstelyssä; erityisesti tulva-aallon etenemistä ratkaistaessa.

1.13 MATEMAATTISET MALLIT

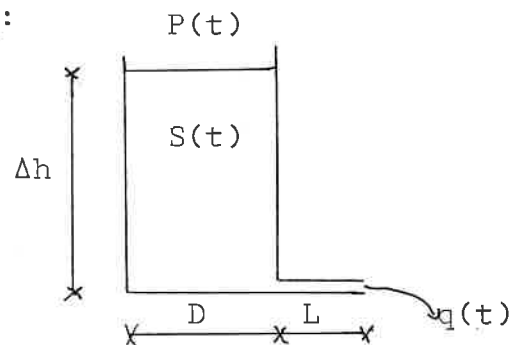
Systeemimallit



Fysikaalinen lähestymistapa:

Mikäli tuntisimme täysin systeemin luonteen ja rakenteen sekä asianomaiset luonnonlait, olisi matemaattisen mallin rakentaminen input'in ja output'in välille varsin helppoa. Tällaisesta tilanteesta esimerkkinä käy seuraava:

Esimerkki:



Poisseeuille:

$$Q = \frac{g}{v} \frac{\pi}{128} d^2 \frac{\Delta h}{L}$$

Δh voidaan ilmaista S:n ja D:n funktiona:

$$\Delta h = \frac{4S}{\pi D^2}$$

Sijoittamalla Δh Poisseuillen yhtälöön saadaan

$$S = k \cdot Q, \quad \text{jossa } k = \frac{32LD^2}{gd^4}$$

Kun S sijoitetaan jatkuvuusyhtälöön

$$P = q + \frac{dS}{dt}, \quad \text{saadaan systeemin toiminnalle matemaattinen malli}$$

$$P = q + k \frac{dq}{dt} \quad P = \text{sadanta}$$

Mallissa k määrää systeemin toiminnan erikoispiirteet.

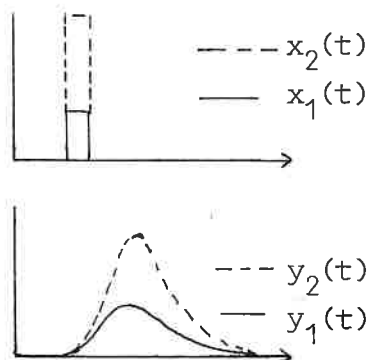
Näin selvää tilannetta ei hydrologiassa koskaan ole, koska luonnonlait ovat liian monimutkaisia ja valuma-alue ominaisuuksiltaan liian vaihtelevia, jotta fysikaalisella tarkastelulla päästäisiin täydellisiin tuloksiin.

Lineaaristen systeemien analysointi

Lineaarisuudella tarkoitetaan: jos input $x_1(t)$ tuottaa output'in $y_1(t)$ ja input $x_2(t)$ $y_2(t)$:n niin lineaarisessa tapauksessa

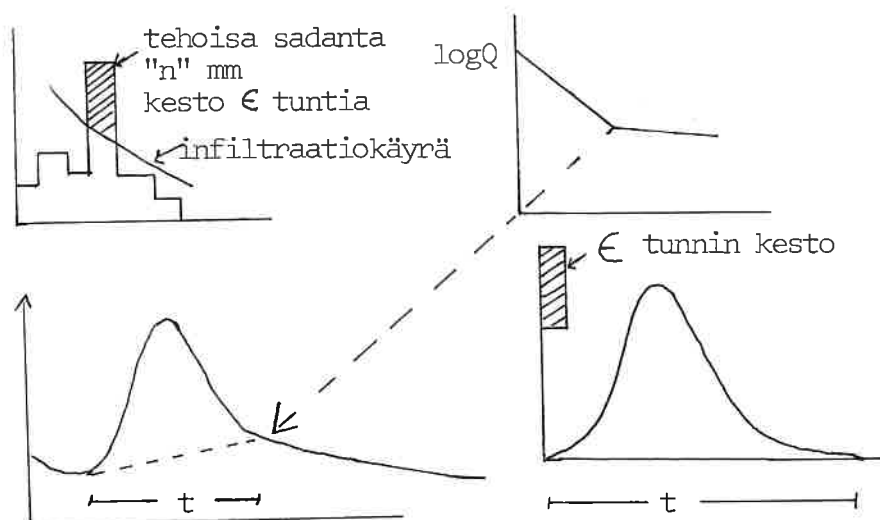
$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

Mikäli $x_2(t) = a \cdot x_1(t) \Rightarrow y_2(t) = a \cdot y_1(t)$



Mikäli systeemi on ajasta riippumaton, se tuottaa aina tietyllä input'illa saman output'in.

Esimerkkinä käy yksikkövalintakäyrämenetelmä jonka kehitti Sherman 1932.



Jos tehoisa sadanta pystytään määräämään ja pohjavalunta erottamaan niin menetelmän käyttö on helppoa.

Kun yksikkövaluntakäyrä on saatu, saadaan ao. sadannan ja yksikkö-sadannan suhteen perusteella ao. sadannan aiheuttama valuntakumpu. Kun näin saatuun valuntaan lisätään pohjavalunta, saadaan lopullinen ylivalumakumpu.

Menetelmästä on lukuisia muunnoksia. Eräässä sovellutuksessa voidaan konstruoida valuntakumpu ilman valuntahavaintoja.
(Synthetic Unit Hydrograph)

Yksikkövaluntakäyrällä on laajalti käyttöä muissa maissa. Suomessa kokeiltu vain kerran (Mustonen 1963) eivätkä tulokset olleet kovin rohkaisevia.

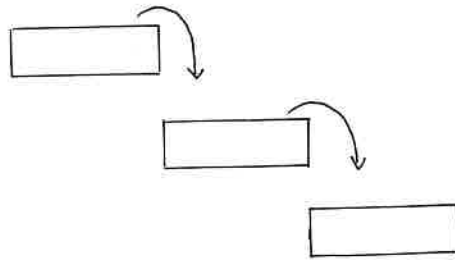
Allasmalleissa ideana on, että valuma-alue korvataan sarjassa tai rinnan olevilla altailla. Lineaarisen altaan tapauksessa menovirtaama on suoraan verrannollinen varaston sisältöön.

$$Q(t) = k \cdot S(t)$$

Allasmallien merkittävänä kehittäjänä toimi Nash, jonka kaskadi-malli (putousmalli) on seuraavanlainen:

Valuma-alueen korvaavat altaat ovat tilavuudeltaan yhtäsuuret. Ensimmäisen altaan menovirtaama on toisen altaan tulovirtaama jne. Allaskerroin k on toinen mallin parametreista, altaiden lukumäärä n toinen. Yksikkövaluntakäyrä on muotoa:

$$Q(t) = \frac{t^{n-1}}{k^n} \frac{1}{(n-1)!} e^{-t/k}$$



Edellä käsiteltyjä systeemimalleja käytetään sadetapahtumasta aiheutuvan valunnan määrittämiseen.

Monimuuttujamallit

Hydrologisen kierron komponenttien ilmaiseminen laskemalla korrelaatioita erilaisten havaittujen input- ja output-arvojen välille.

Matemaattinen formulointi:

$$y(t) = a_1 x_1(t - \tau_1) + a_2 x_2(t - \tau_2) + \dots + a_3 p_1(t - \tau_1) + a_4 p_2(t - \tau_1) + \dots + e + C$$

$y(t)$ = ennustettava muuttuja (virtaama) ajan hetkellä t

$x(t - \tau_n)$ = input muuttuja (sadanta) ajan hetkellä $t - \tau_n$

$p_1, p_2, \dots, p_n$ = valuma-alueen parametrit hetkellä $t - \tau_n$

e = jäännösvirhe

C = vakio

Monimuuttujamallit ovat helppoja laatia. Ne eivät kuitenkaan välttämättä pidä lainkaan yhtä fysikaalisen prosessin kanssa, niinpä niiden käytössä on syytä tiettyyn varovaisuuteen.

Pintavalunnan ja avouomavirtauksen hydrauliset mallit

Ilmaistaan pintavalunta ja avouomavirtaus valuma-alueella Saint-Venat'in diff. yhtälöllä ja jatkuvuusyhtälöllä

$$g \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{Q^2}{k^2} + \frac{q\mu}{F} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} = q(x,t)$$

x = koordinaatti virtauksen suunnassa

z = veden syvyys

u = keskim. nopeus

Q = virtaama

F = virtaaman poikkileikkaus

q = sivusuuntainen tulovirtaama pituus- ja aikayksikköä kohti

$Z = f_1(F,x)$, $k = f_2(F,x)$, g = painovoiman kiihtyvyys

Ongelmaan ei ole analyyttistä ratkaisua. Numeerisia ratkaisuja on kehitetty erityisiä tapauksia varten.

2. ALLASSUUNNITTELUN HYDROLOGISIA PERUSTEITA

2.1 Tulovirtaamatietojen hankinta

- lähtökohtana on ajatus, että hydrologia toistaa itseään
- suotuisin on tilanne; mikäli itse kohdepisteestä on mitattu pitkä (>30 vuotta) virtaamasarja
- seuraava mahdollisuus vertailuvesistö
- erilaiset (yleispätevät) mallit
- myös historialliset tiedot ääritapahtumista syytä ottaa huomioon (esim. vuoden 1899 tulva)
- luotettavuus syytä tutkia; virhemahdollisuuksia ovat mm.
 - lukemavirhe
 - virtaaman mittausvirhe
 - asteikon liikkuminen
 - poikkileikkauksen muutokset
(jää, suppo, liettyminen, ruohottuminen)

yksinkertainen tapa on verrata havaintosarjaa lähellä olevien alueiden havaintosarjoihin (piirtämällä)

2.2 Keskeisiä tunnuslukuja

keskiarvo: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

x_i = jakson i virtaama

n = jaksojen lukumäärä

standardipoikkeama

$$s = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

keskihajonta l. varianssi

$$\sigma = s^2$$

vaihtelukerroin:

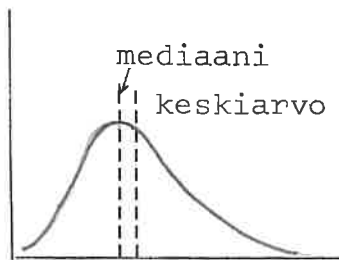
$$C_v = \frac{s}{\bar{x}}$$

vinouskerroin

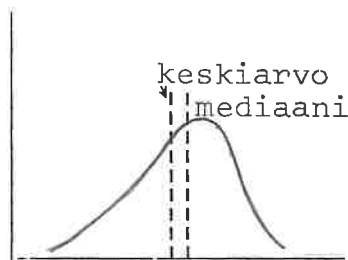
$$C_s = \frac{a}{s^3}$$

$$\text{jossa } a = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3$$

$$= \frac{n}{(n-1)(n-2)} \left[\sum x_i^3 - 3\bar{x} \sum x_i^2 + 2n\bar{x}^3 \right]$$



positiivisesti vino



negatiivisesti vino

Hydrologiassa käytetään myös toista vinouden mittaa:

Pearssonin toinen vinouskerroin:

$$\frac{3 (\text{keskiarvo} - \text{mediaani})}{\text{standardipoikkeama}}$$

Virtaamien vuosi ja kuukausijakautumat ovat positiivisesti vinoja

Sarjakorrelaatiokerroin

(mittaa jaksojen välisten virtaamien keskinäistä riippuvuutta)

$$r_k = \frac{\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} x_i x_{i+k} - \frac{1}{(n-k)^2} \sum_{i=1}^{n-k} x_i \sum_{i=1}^{n-k} x_{i+k}}{\left[\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} x_i^2 - \frac{1}{(n-k)^2} \left(\sum_{i=1}^{n-k} x_i \right)^2 \right]^{1/2} \left[\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} x_{i+k}^2 - \frac{1}{(n-k)^2} \left(\sum_{i=1}^{n-k} x_{i+k} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

r_k = asteen k sarjakorrelaatio

k = viive virtaamatapahtumien välillä

Mikäli r_1 poikkeaa merkitsevästi nollasta mutta muut eivät, on kyseessä ns. Markovin prosessi.

Sarjakorrelaation laskemista varten on useita muita menetelmiä.

Sarjakorrelaatioilla on merkitystä erityisesti, kun operoidaan kuukausiarvoilla (tai lyhyemmällä jaksolla).

Esimerkkiarvoja:

Koko Saimaa

	koko vuosi	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
$\bar{x}$	553	569	559	539	527	545	563	582	585	570	553	555	560
C_v	0.24	0.29	0.30	0.29	0.29	0.27	0.27	0.26	0.26	0.26	0.27	0.28	0.28
C_s	0.054	0.23	0.15	0.15	0.14	0.10	0.23	0.52	0.71	0.66	0.56	0.40	0.17
r_1	0.29	0.94	0.90	0.49	0.35	0.82	0.76	0.71	0.89	0.86	0.90	0.96	0.95

Tunnuslukujen virhetarkastelu:

$$\text{keskiarvon keskivirhe} = s/n^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{standardipoikkeaman keskivirhe} = s/(2n)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{variaatiokertoimen} \quad \text{---} \quad = \left[\frac{1+2C_v}{2n} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{vinouskertoimen keskivirhe} = \left[\frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{sarjakorrelaatiokertoimen keskivirhe} = \frac{(n-k-1)^{\frac{1}{2}}}{n-k}$$

Mikäli oletetaan, että tunnusluvut ovat normaalisesti jakautuneita, jää 2/3 arvoista $\pm$ standardivirheen sisään.

Sarjakorrelaatiokerroin r_k voi poiketa nolasta virheellisen otoksen takia. Tästä syystä on syytä aina testata eron merkitsevyys. Yevjevich esittää käytettäväksi luotettavuusrajoina:

$$CL(r_k) = \frac{-1 \pm Z_\alpha \sqrt{N-k-1}}{N-k}$$

jossa Z_α = normioidun muuttujan arvo kohdassa α

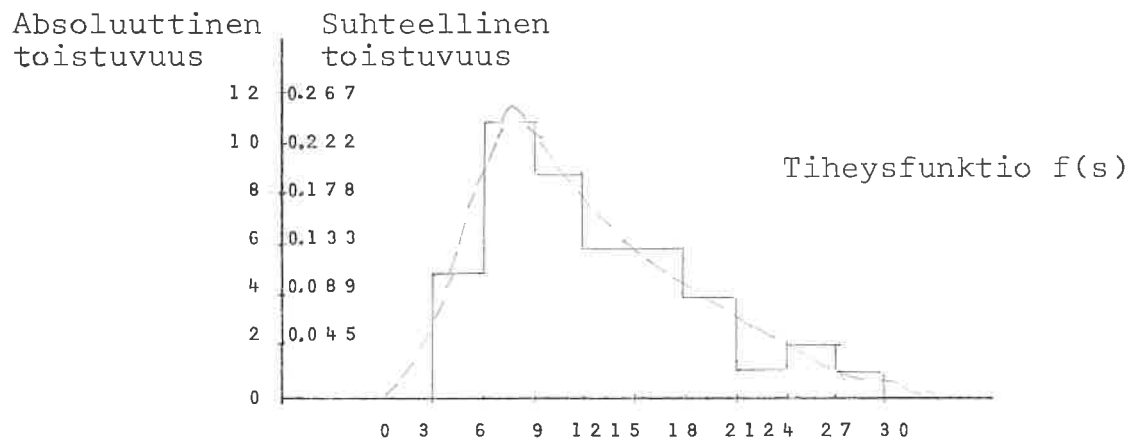
N = tapahtumien (=virtaama-arvojen) lukumäärä

Mikäli r_k on rajojen ulkopuolella, on r_k :n eroa nolasta pidettävä merkitsevä α :n merkitsevyystasolla.

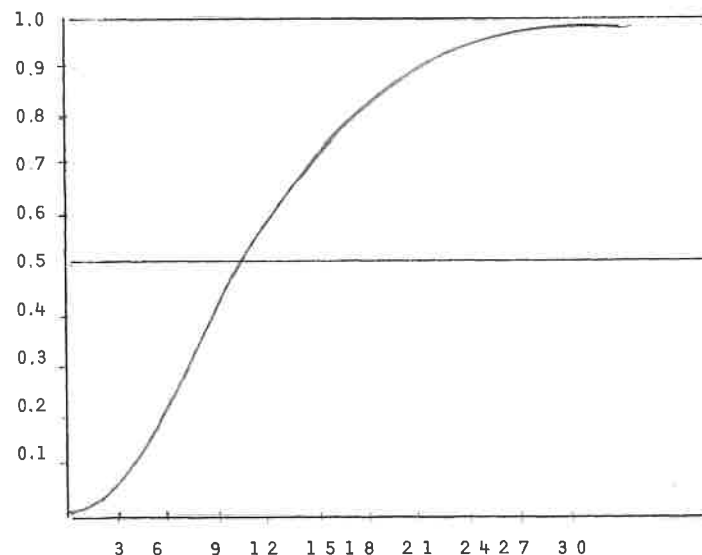
Virtaamien todennäköisyys

Esimerkki erään kuukauden virtaamat:

-45 havaintovuotta



Kertymäfunktio $F(s)$: $F'(s) = f(s)$



Tavallisimmat teoreettiset jatkuvat jakautumat

Normaalijakautuma

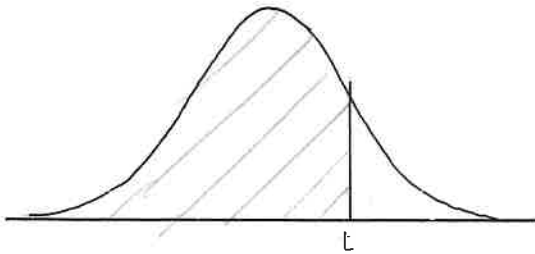
Vaihteluväli $-\infty \leq x \leq +\infty$

$$\text{Tiheysfunktio } f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ = jakautuman keskiarvo

σ = jakautuman keskihajonta

$$\text{Kertymäfunktio } F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$



Mikäli x normitetaan siten, että merkitään $z = (x-\mu)/\sigma$, saadaan tiheysfunktiksi:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Tällöin $\mu = 0$

$\sigma = 1$

Logaritminen normaalijakautuma

Satunnaismuuttujan luonnolliset logaritmit ovat jakautuneet normaalisesti: $y = \ln x$

Vaihteluväli $-\infty \leq y \leq +\infty$

$$\text{Tiheysfunktio } f(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}}$$

μ_y = y :n keskiarvo σ_y = y :n keskihajonta

Seuraavat yhteydet vallitsevat:

$$\mu = \exp(\mu_y + \sigma_y^2/2)$$

$$\sigma^2 = \mu^2 [\exp(\sigma_y^2) - 1]$$

$$C_v = [\exp(\sigma_y^2) - 1]^{\frac{1}{2}}$$

$$C_s = 3C_v + C_v^3$$

Gammajakautuma (2-parametrinen)

Vaihteluväli $0 \leq x < \infty$

Tiheysfunktio $f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$

α = muotoparametri

β = mittakaavaparametri

Γ = gammafunktio $= \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx$

Keskiarvo $\beta \cdot \alpha$

Varianssi $\beta^2 \cdot \alpha$

Pearssonin III tyypin jakautuma

(on itse asiassa sama kuin 3-parametrinen gammajakautuma)

Vaihteluväli $u \leq x < \infty$

Tiheysfunktio $f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \cdot (x-u)^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{(x-u)}{\beta}}$

u = sijaintiparametri

keskiarvo $= u + \beta \cdot \alpha$

varianssi $= \beta^2 \cdot \alpha$

Gumbelin ääriarvojakautuma

Vaihteluväli $-\infty \leq x \leq \infty$

Tiheysfunktio $f(x) = e^{-y} - e^{-y}$ jossa $y = \alpha(x-u)$

α = mittakaavaparametri

β = sijaintiparametri

Keskiarvo $u + \frac{0.5772}{\alpha}$ varianssi $\frac{\pi^2}{6\alpha^2}$

Tavallisimmat epäjatkuvat jakautumat

Binomijakautuma

Vaihteluväli $0 \leq x < n$

Tiheysfunktio $P(x) = \frac{n!}{x! (n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$

Keskiarvo np

Varianssi $np(1-p)$

Poisson-jakauma

Vaihteluväli $0 \leq x \leq \dots$

Tiheysfunktio $P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

Keskiarvo λ

Varianssi λ

Todennäköisyyspaperi

Teoreettisille jakautumille voidaan piirtää sellainen paperi, jossa kertymäfunktio muodostaa suoran. Tälläisen paperin avulla voidaan näppärästi testata, noudattaako satunnaissuure ko. jakautumaa.

Mikäli satunnaissuure noudattaa ko. todennäköisyysjakautumaa, muodostavat sen saamat arvot todennäköisyyspaperilla suoran. Arvojen sijoittelussa paperille voidaan käyttää mm. seuraavia kaavoja

$$\text{Weibull} \quad p = 100 \cdot \frac{m}{n+1}$$

$$\text{Hazen} \quad p = 100 \cdot \frac{2m-1}{2n}$$

$$\text{Chegodajev} \quad p = 100 \cdot \frac{m-0.3}{n+0.4}$$

Jakautuman sopivuus paljastuu jo silmämääräisellä tarkastelulla. Tarvittaessa testataan

- χ^2 -testi
- Kolmogorov-Smirnov-testi

2.3 TOISTUVUUSTEKIJÄ (FREQUENCY FACTOR)

Chow esitti 1951, että useimmat toistuvuutta esittävät, hydrologiassa käytettävät funktiot voidaan esittää yleisessä lineaarisessa muodossa

$$\frac{x}{\bar{x}} = 1 + K \cdot C_v$$

jossa x = hydrologinen muuttuja

$\bar{x}$ = ko. muuttujan keskiarvo

K = toistuvuustekijä

C_v = vaihtelukerroin

$$x = \bar{x} + Ks$$

K :n arvot on taulukoitu. Kaksiparametrinen jakautumien ollessa kyseessä se riippuu toistuvuuden todennäköisyydestä (tai toistumisajasta). Vinoissa jakautumissa se riippuu myös vinouden määrästä.

2.4 ALIVALUMAT

Suomessa ensimmäisen alivalumia koskevan tutkimuksen teki Renqvist (1935).

Wäre (1951, 1952, 1954) selvitteli keskialivaluman riippuvuutta järvisyydestä ja valuma-alueen pinta-alasta.

Niinivaara (1957, 1958, 1961) analysoi alivalumia päävesistö-alueilta 1911-50 kerätyn aineiston perusteella. Hän käytti Pearssonin jakautumatyypeistä (joita kaikkiaan on 13) tyyppejä I ja III. Tyypin valinta tapahtuu Fosterin mukaan seuraavasti:

$$1. \text{ Laske } C_{sadj.} = (1 + \frac{8.5}{n})C_s$$

jossa C_s = Pearssonin vinouskerroin
 n = havaintovuosien lukumäärä

$$2. \text{ Jos } C_{sadj.} > 2C_v \Rightarrow \text{Tyyppi III}$$

$$\text{Jos } C_{sadj.} < 2C_v \Rightarrow \text{Tyyppi I}$$

3. Mikäli tyyppi I osoittautuu paremmaksi laske sille uusi vinous kaavasta

$$C_{sadj.} = (1 + \frac{6}{n}) \cdot C_s$$

Laskelmiensa tulokset Niinivaara esitti 1958 35 kuvana. Näiden kuvien avulla voidaan arvioida alivaluman toistuvuus, mikäli järviprosentti ja keskialivaluma tunnetaan.

1961 Niinivaara jatkoi alivalumien tarkastelua ja laajensi tarkastelua 15, 30, 45 ja 60 vrk:n kuivakauden alivalumiin. Tutkimuksessa jaettiin valuma-alueet suuruuden perusteella kahteen osaan: 565... 9645 km² ja 14 315... 61 280 km²

Selittäjänä Niinivaara käytti järvisyysprosenttia. Kaavat saivat seuraavia muotoja ($l/s.km^2$):

(Nq15)1/2	0.23J + 1.09	0.27J + 1.80
1/10	0.13J + 0.93	0.14J + 1.66
1/20	0.10J + 0.91	0.12J + 1.60
1/50	0.084J + 0.87	0.10J + 1.48
1/100	0.071J + 0.83	0.095J + 1.43

(Nq30)1/2	0.24J + 1.22	0.28J + 1.92
1/10	0.12J + 1.09	0.15J + 1.67
1/20	0.10J + 1.04	0.12J + 1.64
1/50	0.080J + 1.03	0.11J + 1.52
1/100	0.069J + 1.00	0.098J + 1.44

(Nq45)1/2	0.25J + 1.39	0.28J + 2.14
1/10	0.13J + 1.18	0.14J + 1.86
1/20	0.10J + 1.15	0.12J + 1.72
1/50	0.002J + 1.11	0.11J + 1.54
1/100	0.070J + 1.07	0.10J + 1.45

(Nq60)1/2	0.26J + 1.65	0.28J + 2.53
1/10	0.13J + 1.31	0.14J + 2.03
1/20	0.10J + 1.28	0.12J + 1.90
1/50	0.081J + 1.23	0.11J + 1.67
1/100	0.068J + 1.22	0.099J + 1.55

Näinollen esim. Säkylän Pyhäjärvelle saadaan seuraavasti alivirtaama-arviot ($A = 614 km^2$, $J = 25 \%$)

	1/2	1/10	1/20	1/50	1/100
Nq15	6.84	4.18	3.41	2.97	2.68
Nq30	7.22	4.09	3.54	3.03	2.73
Nq45	7.64	4.43	3.65	3.16	2.82
Nq60	8.15	4.56	3.78	3.26	2.92

Kajosaari analysoi 1969 käyttäen 17 suuren alueen aineistoa Gumbelin paperiin luottaen eri pituisten kuivakausien (5vrk...4) virtaamien toistuvuutta. Hän teki mm. seuraavia huomioita:

1. Samojen ilmastotekijöiden vaikuttaessa vesistöalueen kasvu ja järvisyyden lisääntyminen pienentävät kuivakausien keskivalumien eroja.
2. Etelä-Suomessa on talvikuivakausien keskivaluma suurempi kuin vastaavan pituisten kesäkuivakausien valuma. Pohjois- ja Keski-Suomessa suhde on päinvastainen.

Valuman vaihtelujen luonnetta kuivakauden aikana selvittäessään Kajosaari käytti tulovirtaan keskiarvosta poikkeamisen- menetelmää katsomalla, minkä suuruinen varasto tarvitaan ko. jakson keskivirtaaman toimittamiseen. Näin saatua varastotilavuutta hän nimitti valunnan ominaisvajaukseksi. Tämän varastotilavuuden hän esitti keskivaluman funktiona kunkin pituiselle kuivakaudelle.

Valunnan ominaisvajauksen voimakkaimmin vaikuttavaksi tekijäksi osoittautui järvisyys.

Mustonen selvitti 1971 mahdollisuuksia estimoida alivalumia pienillä järvettömillä alueilla. Hänen käyttämänsä aineisto on kerätty nykyisen hydrologian toimiston pieniltä valuma-alueilta. Näiden alueiden koko vaihteli välillä $0.7...122 \text{ km}^2$. Havaintovuosia oli alueilta keskimäärin 10.

Tutkimustensa tuloksena Mustonen esittää, että keskialivalumat voidaan arvioida kaavalla:

$$\text{talvella} \quad MNq_t = a + c \cdot t^2$$

$$\text{kesällä} \quad MNq_t = a + b \cdot t + c \cdot t^2$$

a,b,c = kertoimia

t = alivalumakauden pituus 1...150 vrk

Kertoimien määrittäminen tapahtuu seuraavilla kaavoilla:

Talvi: $[R = 0.82]$

$$a = -2.47 + 0.162 \cdot S_s + 0.00489 \cdot P_v$$

$$c = (335 + 23.0 \cdot T_2) \cdot 10^{-6}$$

Kesä: $[R = 0.90]$

$$a = 10.90 - 0.687 \cdot T_7 + 0.241 S_s$$

$$b = (491,6 - 27,75 \cdot T_7 + 3.98 \cdot S_s) \cdot 10^{-3}$$

$$c = (-1.688 + 122.5 \cdot T_7 - 23,2 \cdot S_s) \cdot 10^{-6}$$

Näissä kaavoissa

S_s = maaston keskikaltevuus (%)

P_v = vuosisadanta (mm)

T_2 = helmikuun keskilämpötila ($^{\circ}\text{C}$)

T_7 = heinäkuun keskilämpötila ($^{\circ}\text{C}$)

Alivaluman toistuvuuden tarkastelussa Mustonen esittää käytettäväksi seuraavia kaavoja:

$$k = \frac{Nq \cdot 1/20}{M Nq} \cdot 100 \%$$

Talvi

$$k_1 = 133,4 - 7,84 T_2 + 0.35 \cdot PO + 0.55 \cdot PK + 0.085 P_v \quad [R = 0.73]$$

$$k_{30} = -100.2 - 8.92 \cdot T_2 + 0.33 \cdot PO + 0.67 \cdot PK \quad [R = 0.76]$$

$$k_{150} = -48.8 - 6,21 \cdot T_2 + 0.31 \cdot PK \quad [R = 0.80]$$

Kesä

$$k_1 = -56,5 + 2,35 S_s + 0,101 \cdot P_v \quad [R = 0.58]$$

$$k_{30} = -44,1 - 2,88 \cdot S_s + 0.075 \cdot P_v \quad [R = 0.67]$$

$$k_{150} = 122,1 - 11,75 \cdot T_7 + 2.09 \cdot S_s + 0,142 \cdot P_v \quad [R = 0.82]$$

Kaavoissa esiintyvät lisätermit ovat:

PO = pellon osuus alasta [%]

PK = puuston kuutiomäärä [m^3/ha]

Mustosen selityksessä tärkeimmäksi aluetekijäksi osoittautui kaltevuus. Tämän laskemiseen peruskartalta käytetään kaavaa:

$$S_m = \frac{\Delta h \cdot \Sigma L}{A} \cdot 100$$

jossa

S_m = maaston kaltevuus kartalta mitattuna [%]

Δh = korkeuskäyrien väli

ΣL = korkeuskäyrien yhteispituus

A = valuma-alueen ala

$$S_s = S_m + 1$$

3. VESIHUOLTOALTAAN MITOITUS

Esimerkki: Säskylän Pyhäjärvestä halutaan juoksuttaa jatkuvasti $2,0 \text{ m}^3/\text{s}$. Varastotilavuuden suuruus?

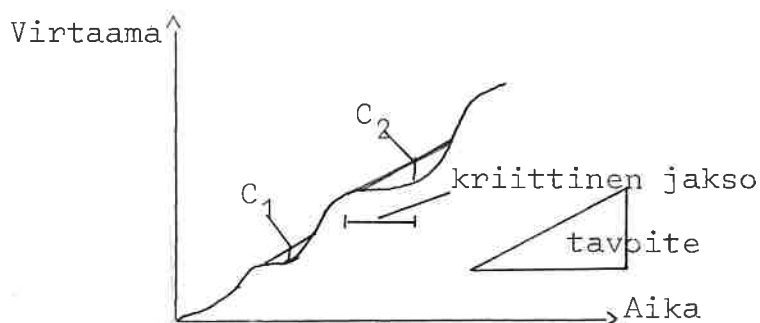
3.1 A. MENETELMÄT, JOTKA INDIKOIVAT ALTAAN TÄYTTÖASTETTA

3.11 I Summakäyrämenetelmä

Ensimmäinen tunnettu järkevä menetelmä (Rippl 1883).

Vaiheet:

1. Konstruoidaan kuukausiarvoja käyttäen tulovirtaamien summakäyrä



2. Piirretään tavoitejuoksutuksen kaltevuuden omaavat viivat jokaisen kummun tangentiksi.

3. Mitataan tangenttien ja summakäyrän suurin etäisyys.

Kuvassa $C_2 > C_1$ tarvittava varastotilavuus on C_2 .

Tarpeelliset oletukset:

1. Allas on täysi ajanhetkellä 0 ja niinmuodoin myös kriittisen jakson alussa.
2. Käytettäessä menneisyydessä tapahtunutta hydrologista tietoa joudutaan olettamaan, että tulevaisuudessa ei pahempia kuivakausia esiinny.

Rajoituksia:

1. Tavoitejuoksutus oletetaan yleensä vakioksi. Säännölliset aikaan sidotut vaihtelut voidaan vielä hoitaa, mutta varastotilavuuden tilaan sidotut vaatimukset ovat hankalasti otettavissa huomioon.
2. Summakäyrän avulla saatu varastotilavuus kasvaa havaintojen pidetessä. Sentähden on vaikeata suhteuttaa varastotilavuutta hankkeen taloudelliseen ikään.
3. Varastotilavuutta ei voida laskea tietylle veden riittämättömyyden todennäköisyydelle.

Etuja:

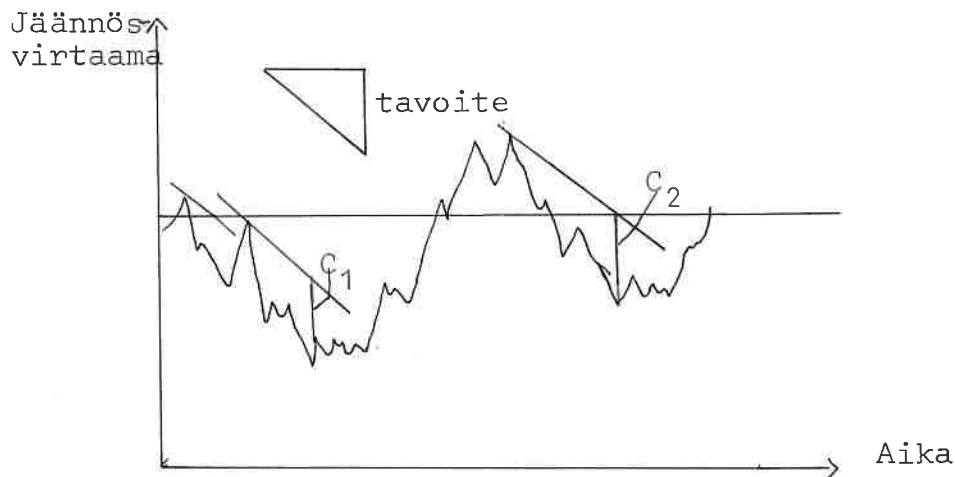
1. Menettelytapa on yksinkertainen
2. Siinä tulevat huomioonotetuksi sarjakorrelaatio ja muut virtaamaa kuvaavat tunnusluvut (sellaisina kuin ne ovat mitatussa aikasarjassa).

3.12 II Jäännöskäyrämenetelmä (Keskiarvosta poikkeamisen summakäyrä)

Vaiheet:

1. Lasketaan koko havaintojakson keskiarvo (kuukausiarvoista). Vähennetään keskiarvo kunkin kuukauden mitatusta arvosta. Jäljelle jääneitä arvoja kutsutaan jäännösarvoiksi.

2. Piirretään jäännösarvojen summakäyrä ja tavoitejuoksutuksen kaltevuuden omaavat viivat jokaisen kummun tangentiksi.



3. Mitataan tangenttien ja summakäyrän suurin etäisyys.

Tarpeelliset oletukset, rajoitukset ja edut ovat samat kuin summakäyräproseduurissa. Lisäetuna on, että mittakaava voidaan valita suuremmaksi, jolloin tarkkuus paranee.

3.13 III Analyttinen menetelmä (simulointi)

Tässä menetelmässä varaston muutokset lasketaan käyttämällä vesitaseyhtälöä.

$$Z_{t+1} = Z_t + Q_t - D_t - L_t$$

$$\text{rajoituksin } 0 \leq Z_{t+1} \leq C$$

$$Z_{t+1} = \text{varasto jakson } t \text{ lopussa (=t+1 alussa)}$$

$$Z_t = \text{varasto jakson } t \text{ alussa}$$

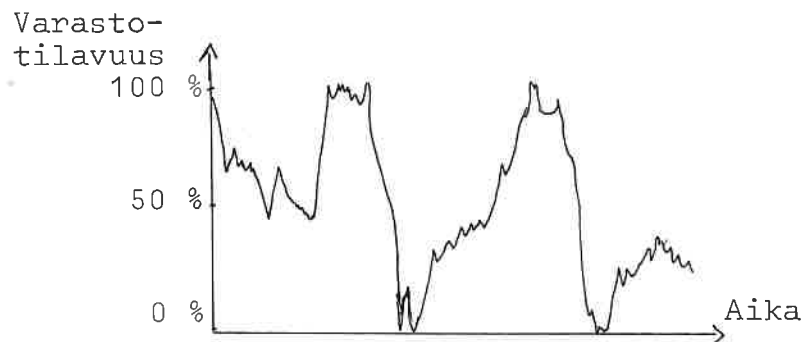
$$Q_t = \text{nettotulovirtaama jakson } t \text{ aikana}$$

$$D_t = \text{juoksutus jakson } t \text{ aikana}$$

$$L_t = \text{mahdolliset häviöt jakson } t \text{ aikana}$$

Vaiheet:

1. Valitaan jokin järkevääntuntuinen varastokapasiteetti C . Oletetaan, että allas on alussa täysi, ts. $Z_0 = C$.
2. Sovelletaan em. vesitaseyhtälöä jakso jaksolta käytettävissä olevaan virtaamasarjaan. D_t voidaan olettaa vakioksi tai se voi ajallisesti vaihdella. D_t voi olla myös funktio varastotilavuudesta.
3. Piirretään Z_{t+1} :n kuvaaja: (ns. käyttäytymisdiagrammi)



4. Lasketaan todennäköisyys veden riittämättömyydelle jakamalla niiden aikajaksojen lukumäärä, joina varasto on tyhjä, jaksoiden kokonaismäärällä.
5. Mikäli ko. todennäköisyys on liian suuri, valitaan uusi C ja laskelmaa toistetaan niin kauan, että todennäköisyys voidaan hyväksyä.

On luonnollisesti täysin mahdollista saada varasto sellaiseksi, että varasto käy kerran alarajallaan. Näin saatu tulos on sama kuin summakäyrää käyttämällä saatu.

Tarpeelliset oletukset:

1. Varastoallas on alussa täysi
2. Hydrologinen historia toistaa itseään.

Rajoituksia:

1. Oletus 1 vaikuttaa varaston kokoon
2. Oletus 2 ei todellisuudessa päde
3. Mikäli virtaamahavainnoissa on aukkoja on vaikeuksia määrätä varaston tila havaintoaukon jälkeen.
4. Kasvava vedentarve hankala ottaa huomioon.

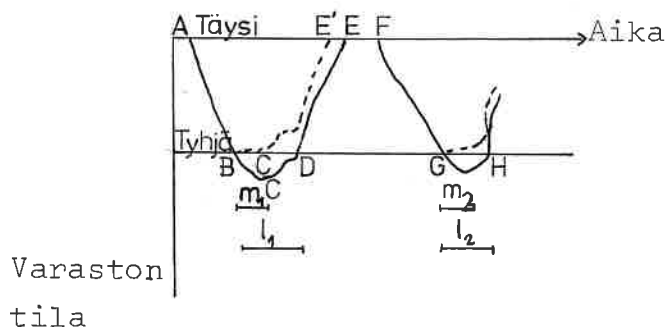
Etuja:

1. Yksinkertainen menettelytapa
2. Menetelmä ottaa huomioon sarjakorrelaation ja muut virtaamaparametrit (sellaisina kuin ne ovat mitatussa aikasarjassa).
3. Monimutkaisiakin juoksutusohjeita voidaan helpohkosti ottaa huomioon.

3.14 IV Puoliäärettömän altaan menetelmä

Hazen (1914) käytti ensimmäisenä ns. semi-infinite storage-menetelmää pyrkiessään laskemaan todennäköisyyttä veden riittämättömyydelle. Tällainen käsitteellinen allas ei koskaan kuivu, mutta yläraja varastolla on. Ylärajan yläpuolella tapahtuu hukkaajuokstusta.

Tällaisen varaston tyhjentymiskäyrä on normaali käyttäytymisdiagrammi (Z_{t+1} :n kuvaaja) ilman alarajaa.



Puoliäärettömän altaan tyhjentymiskäyrä = täysi viiva

Äärellisen altaan tyhjentymiskäyrä = katkoviiva

Riittämättömyyden todennäköisyys puoliääretöntä allasta käytettäessä:

$$P_{\text{semi}} = \frac{\sum l_i}{N}$$

$\sum l_i$ = tyhjien jaksoiden lukumäärä

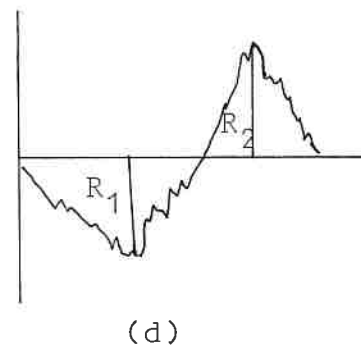
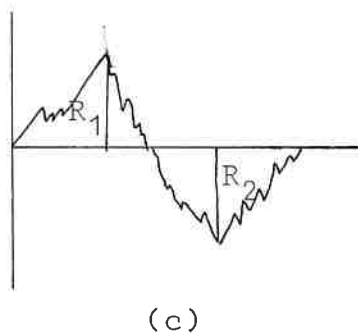
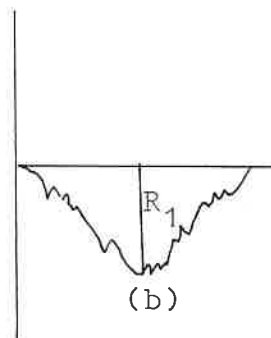
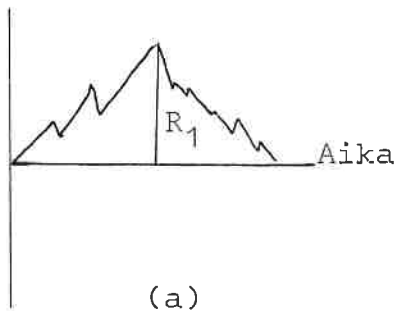
N = jaksoiden kokonaislukumäärä

Äärellisellä altaalla vastaavasti

$$P_{\text{fin}} = \frac{\sum m_i}{N}$$

Havaitaan, että $P_{\text{semi}} > P_{\text{fin}}$. Käyttämällä puoliääretöntä allasta saadaan varmuus suuremmaksi. Varmuuskerroin on suuruusluokkaa 1.2...1.3.

3.2 MENETELMÄT, JOTKA PERUSTUVAT VAIHTELUVÄLIN (RANGE) KÄYTTÖÖN



Mikäli tavoitejuoksutus on yhtäsuuri kuin keskivirtaama, on varastotilan tarve tapauksissa a, b ja c sama kuin vaihteluväli $R = R_1 + R_2$. Tapauksessa d vaihteluväli on myös $R = R_1 + R_2$, mutta varastotilan tarve on suurempi arvoista R_1, R_2 .

3.21 Hurstin menetelmä

Hurst (1951) analysoi noin 700 pitkää aikasarjaa. Nämä koskivat mm. virtaamia, sadantoja, lämpötiloja, puiden kasvurenkaita ja järvien sedimenttejä. Hurst havaitsi, että vaihteluväli R riippui havaintosarjan pituudesta seuraavasti:

$$\frac{R}{s} = \left(\frac{N}{2} \right)^K$$

R = vaihteluväli

s = havaintojen standardipoikkeama

N = aikasarjan pituus

K = ns. Hurstin kerroin

Hurst sai K :n keskiarvoksi 0.72 ja standardipoikkeamaksi 0.09.

[Mikäli prosessi tuottaisi puhdasta satunnaista aikasarjaa olisi $K = 0.5$. Se, että luonto tuottaa aikasarjaa, jossa $K > 0.5$, tunnetaan Hurstin ilmiönä].

Saamiensa tulosten pohjalta Hurst pyrki yleisen varaston antoisuuden ratkaisuun ja sai yhtälöt:

1. Kun tavoitejuoksutus = $\frac{D}{\bar{x}}$ keskivirtaama:

$$C = R$$

2. Kun tavoitejuoksutus = $\frac{D}{B}$ keskivirtaama

$$\log_{10} \left(\frac{C}{R} \right) = -0.08 - 1.05 (\bar{x} - B)/s$$

tai

$$\frac{C}{R} = 0.94 - 0.96 \left[(\bar{x} - B)/s \right]^{\frac{1}{2}}$$

Tulokset ovat suhteellisen reippaita yleistyksiä.

Menetelmän rajoituksena on, että sillä ei voida laskea varasto-tilavuutta riittämättömyyden eri todennäköisyyksille.

Hurstin työ oli erityisen merkityksellinen koska, hän osoitti, että luonnossa $K > 1/2$.

3.22 Thomas-Fiering algoritmi

(Sequent Peak Algorithm)

Vaiheet:

1. Lasketaan $X_i - D_i$ $i = 1, 2, \dots, \underline{2N}$
ja lasketaan tulovirtaaman
nettosumma $\sum_{i=1}^t (X_i - D_i)$ $t = 1, 2, \dots, 2N$

N = havaintovuosien lukumäärä

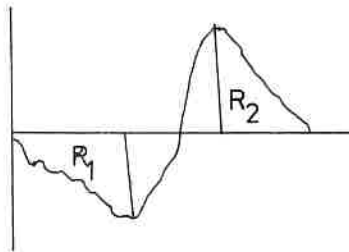
 X_i = kuukausivaluma D_i = kuukausijuoksutus

Kuukausi	Virtaama X_i 10^6 m^3	Virtaama- juoksutus ($X_i - D_i$)	$\sum X_i - D_i$ 0	Huomautuksia
1	10,9	5,7	5,7	P ₁ (1. huippu)
2	4,6	-0,6	5,1	
3	52,8	47,6	52,7	
4	24,8	19,6	72,3	
5	3,1	-2,1	70,2	
6	0,5	-4,7	65,5	T ₁ (1. laakso)
7	13,7	8,5	74,0	P ₂ (2. huippu)
8	-2,0	-7,2	66,8	T ₂ (2. laakso)
9	6,5	1,3	68,1	P ₃ (3. huippu)
10	34,5	29,3	97,4	
11	37,4	32,2	129,9	
12	10,0	4,8	134,7	
13	7,1	1,9	136,6	
14	7,1	1,9	138,5	
15	-2,0	-7,2	131,3	

2. Paikannetaan 1. huippu (paikallinen maksimi), P_1 .
3. Paikannetaan 2. huippu, P_2 , joka on suurempi kuin P_1 .
4. Näiden välistä löytyy paikallinen minimi, T_1 . Lasketaan $P_1 - T_1$.
5. Haetaan seuraava huippu P_3 , joka on suurempi kuin P_2 .
6. Haetaan minimi T_2 ja lasketaan $P_2 - T_2$.
7. Haetaan P_3 ja T_3 ja lasketaan $P_3 - T_3$.
8. Jatketaan ja haetaan kaikki huiput ja laaksot $2N$ jaksojen ajalta (kaksi kierrosta).
9. Tarvittava maksimikapasiteetti on

$$C = \max (P_k - T_k)$$

Syy toiseen laskentakierrokseen nähdään kuviosta



Tarvittava varastotilavuus on suurempi arvoista R_1 , R_2 , mutta vaihteluväli $R = R_1 + R_2$. Tällainen poikkeama syntyy siitä syystä, että havaintosarjan katkeaminen estää varaston tyhjentymisen. Tätä korjataan toisella laskentakierroksella.

Huomautuksia:

1. Algoritmi tarkoitettiin alunperin ns. synteettisiä sarjoja lähtökohtana pitävään laskentaan.
2. Menetelmällä on samoja puutteita kuin summakäyrällä:
 - juoksutus ei voi olla varaston tilan funktio
 - saatu lopputulos riippuu havaintojen pituudesta
 - mitatulla aikasarjalla laskettaessa saadaan vain sellaisen varaston tilavuus, joka ei juuri ja juuri tyhjene.
3. Laskennallisesti menetelmä on nopea.
4. Menetelmä ottaa huomioon sarjakorrelaation ja muut virtaamaparametrit (sellaisina kuin ne ovat mitatussa virtaamasarjassa).

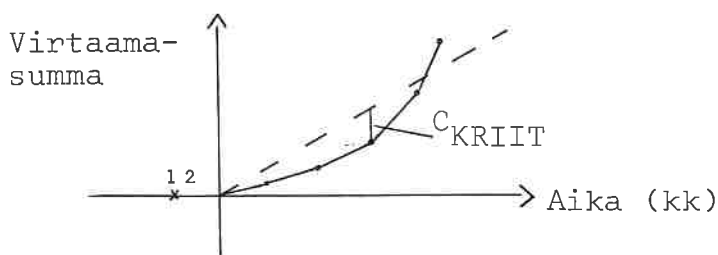
3.3 MENETELMÄT, JOTKA PERUSTUVAT ALIVIRTAAMAJAKSOJEN TARKASTELUUN

3.31 Minimivirtaamamenetelmä (Waitt 1945)

Vaiheet:

1. Haetaan eri pituisten jaksojen (esim. 1, 2, 4, 8, 12 kk, jne) pienimmät virtaamasummat
2. Sijoitetaan saadut arvot summa-aika -koordinaatistoon
3. Piirretään em. koordinaatistoon tavoitejuoksutus siten, että se kulkee origon kautta
4. Mitataan summakäyrän ja tavoitejuoksutuksen suurin etäisyys.

C_{KRIIT}

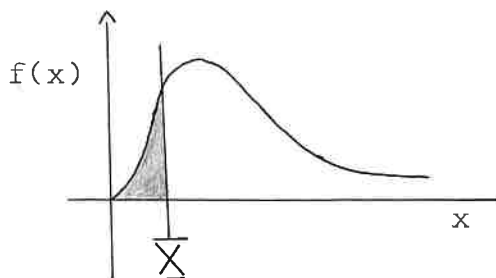


Tuloksen pitäisi olla sama kuin summakäyrää käyttämällä saatu. Waitt suositteli lisättäväksi C_{KRIIT} -arvoon vuosijuoksutuksen, jotta varmuus olisi riittävä.

3.32 Alexander'in menetelmä

Menetelmää voidaan pitää Waitt'in menetelmän kehittyneempänä muotona.

Alexander oletti, että VUOTUISET virtaamat ovat gammajakautuneita.



$$P(x \leq \bar{x}) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{\bar{x}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx$$

Thoms'in (1958) mukaan parametrit voidaan estimoida kaavoilla

$$\text{Muoto} \quad \hat{\alpha} = \frac{1 + \left(1 + \frac{4A}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}{4A}$$

$$\text{jossa } A = \log_e \bar{x} - \overline{\log_e x}$$

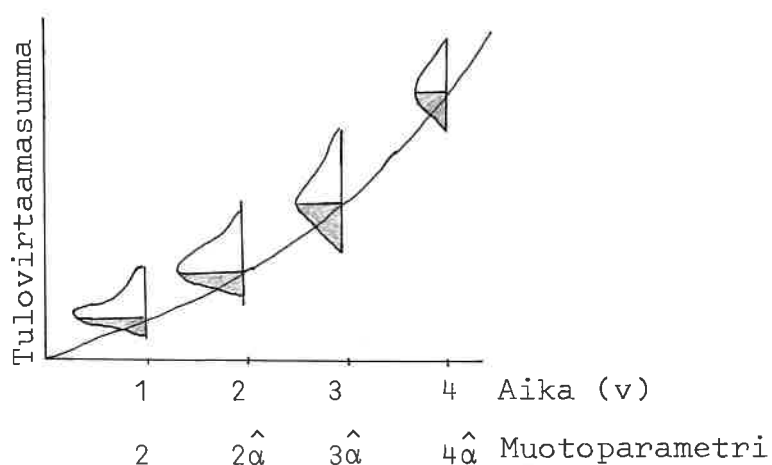
$$\text{Mittakaava} \quad \hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}}$$

Gammajakautuneilla muuttujilla on ominaisuus, että $n:n$ parametrein α, β jakautuneen muuttujan summa on gammajakautunut parametrein:

$$\alpha_n = n\alpha$$

$$\text{ja koska} \quad \bar{x}_n = n\bar{x} \therefore \beta_n = \frac{\bar{x}_n}{\alpha_n} = \frac{n\bar{x}}{n\alpha} = \beta$$

Näistä lähtökohdista lähtien Alexander laski halutuille todennäköisyyksille minimivirtaamakäyrät:



Alexander laati joukon käyriä tilanteille, joissa juoksutus ilmaistaan vakiosuhteena keskivirtaamasta. Muotoparametrinä $\hat{\alpha} = 1$. Jos $\hat{\alpha} \neq 1$ saadaan varastotilavuus jakamalla $\hat{\alpha}:n$ arvolla 1 saatu tilavuus oikealla muotoparametrillä.

Vaiheet:

1. Valitaan vakiojuoksutus, joka ilmaistaan % keskivirtaamasta.
(D)
2. Lasketaan muotoparametri $\hat{\alpha}$ em. Thom'in menettelytavalla.
3. Valitaan veden riittämättömyyden todennäköisyys.
4. Käyttämällä Alexanderin nomogrammia estimoidaan τ_1 ja CP_1 , kun toistumisaika T_r ja D tunnetaan.

$$T_r = \frac{1}{\text{tapahtuman todennäköisyys}}$$

$$\tau_1 = \frac{\text{varastotilavuus}}{\text{vuoden keskivirtaama}}, \text{ kun } \hat{\alpha} = 1$$

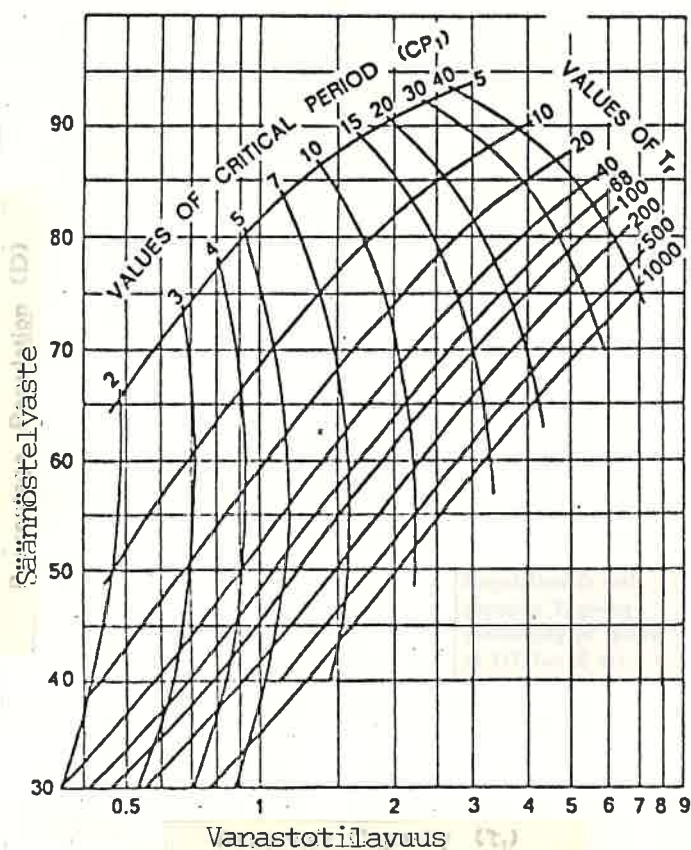
$$CP_1 = \text{kriittinen ajanjakso (vuosina)}, \text{ kun } \hat{\alpha} = 1$$

5. Lasketaan haluttu varastotilavuus:

$$C = \frac{\tau_1}{\hat{\alpha}} \bar{x}$$

6. Vastaavan kriittisen ajanjakson pituus vuosina on

$$CP = \frac{CP_1}{\hat{\alpha}}$$



Alexanderin käyrästä

Tarpeelliset oletukset:

1. Vuosivalumat ovat riippumattomia
2. Vuosivalumat ovat gammajakautuneet
3. Varasto on täysi kriittisen jakson alussa.

Rajoituksia:

1. Suurissa, järviä sisältävissä vesistöissä riippumattomuus on tuskin perusteltu oletus.
2. Meikäläisissä olosuhteissa ei ole tutkittu, ovatko vuosivalumat 2-parametrinen gammajakautuman mukaisesti jakautuneita.
3. Vain vuosiarvoja voidaan käyttää, ei kuukausiarvoja.
4. Juoksutus on oletettava vakioksi.
5. Allas on oletettava täydeksi.

Etuja:

1. Menetelmä on nopea ja yksinkertainen.
2. Riittävän tarkka alustavaan suunnitteluun.
3. Koska minimivirtaamien toistumisajat arvioidaan, todennäköisyydet veden riittämättömyydelle saadaan selville.

3.33 Dincer'in menetelmä

Dincer oletti, että vuosivalumat ovat riippumattomia ja normaalisti jakautuneita. Tavoitejuoksutuksen hän olétti vakioksi.

Näillä edellytyksillä hän keskeisen raja-arvolauseen perusteella sai seuraavat kaavat kriittisen jakson pituuden (KJ) ja varastotilavuuden (C) laskemista varten.

$$KJ = \frac{Z_P^2}{4(1-D)^2} C_V^2$$

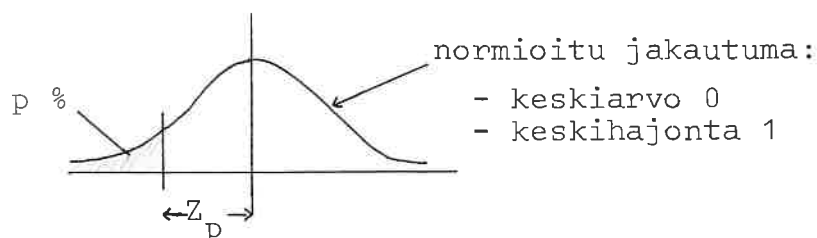
$$C = \frac{Z_P^2}{4(1-D)} C_V^2 \cdot \bar{x}$$

Z_p = normioitun muuttujan arvo kohdassa p

D = tavoitejuoksutus (suhteena keskivalumaan)

C_v = variaatiokerroin

$\bar{x}$ = keskivaluma



3.34 Gouldin Gamma-menetelmä

Gouldin mielestä gammajakautuma kuvaa paremmin vuosivaluntojen jakautumaa kuin normaalijakautuma. Toisaalta taas normaalijakautumaa koskevia taulukoita on helposti saatavilla.

1-parametrinen (vain muotoparametri) gammajakautuman tiheysfunktio on

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}$$

Tällaisella jakautumalla on ominaisuus, että keskiarvo ja varianssi ovat yhtäsuuret kuin muotoparametri α . On mahdollista muuntaa normaalijakautuman keskiarvo $\bar{x}$ ja standardipoikkeama s gammayksiköiksi jakamalla ne molemmat tekijällä s^2/x . Näin saadulla normaalijakautumalla on gammayksikköinen keskiarvo ja varianssi.

Dincer'in mukaan varastotilan tarve oli

$$C = \frac{Z_p^2}{4(1-D)} C_v^2 \bar{x}$$

Sijoittamalla $\bar{x}$:n ja C_v^2 :n paikalle gammayksiköt saadaan varastotilalle lauseke

$$C_Y = \frac{Z_p^2}{4(1-D)}$$

Gould väitti, että ero d normaali-



ja gammajakautuman välillä on likipitään vakio tietyllä p :n arvolla:

p	Z_p	d
0.5	3.30	ei vakio
1.0	2.33	1.5
2.0	2.05	1.1
3.0	1.88	0.9
4.0	1.75	0.8
5.0	1.64	0.6
7.5	1.44	0.4
10.0	1.28	0.3

Menetelmää ei suositella

Koska d on vakio, on Gouldin mukaan kriittinen jakso gammajakautuneella virtaamalla sama kuin normaalijakautuneella virtaamalla, kun keskiarvo ja vaihtelukerroin ovat samat, ja vaadittu varastotila gammajakautuneella virtaamalla on d gammayksikköä vähemmän kuin normaalijakautuneilla virtaamalla. Toisin sanoen

$$C_Y = \frac{Z_p^2}{4(1-D)} - d$$

Gammayksiköistä päästään eroon kertomalla oikea puoli tekijällä

$\left(\frac{s^2}{\bar{x}}\right) \cdot \frac{1}{\bar{x}}$ jolloin saadaan:

$$C = \frac{Z_p^2}{4(1-D)} C_v^2 \cdot \bar{x} - d \cdot C_v^2 \cdot \bar{x}$$

C = tarvittava varastotilavuus

Z_p = normioidun muuttujan arvo kohdassa p

D = tavoitejuoksutus (suhteena keskivalumaan)

C_v = vaihtelukerroin

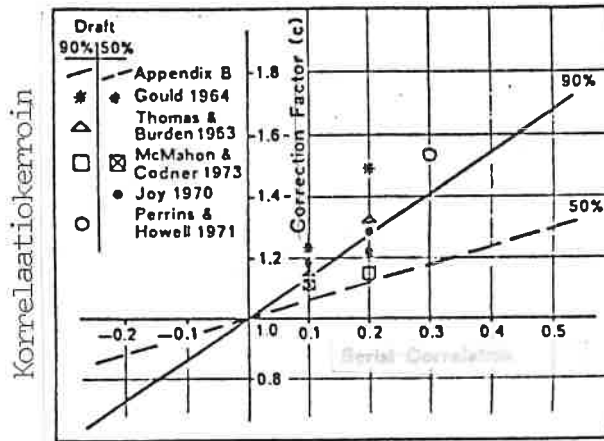
$\bar{x}$ = vuosivalumien keskiarvo (tilavuusyksikköinä)

d = kohdan p ero normaali- ja gammajakautumissa

Oletuksia, rajoituksia, etuja:

Menetelmä on muuten sama kuin Dincer'illa, mutta tässä päästään eroon normaaliajakautuman oletuksesta.

Huomautus: Jos peräkkäiset vuodet eivät ole riippumattomia on saatua tulosta korjattava.



Sarjakorrelaatio

3.35 Alivirtaamien toistuvuusanalyysiin perustuva menetelmä

Vuotuisien alivirtaamien toistuvuuskäyrät ovat tämän menetelmän lähtökohtana. Tällaista menetelmää käyttää mm. U.S. Geological Survey.

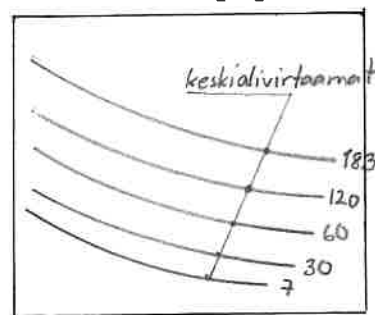
Vaiheet:

1. Keskialivirtaamat jokaiselta vuodelta haetaan esim. seuraaville ajanjaksoille: 1, 7, 15, 30, 60, 120 ja 180 vrk.
2. Nämä virtaamat järjestetään (kukin ajanjakso erikseen suuruusjärjestykseen alimmasta ylimpään).
3. Toistuvusaika arvioidaan kaavalla

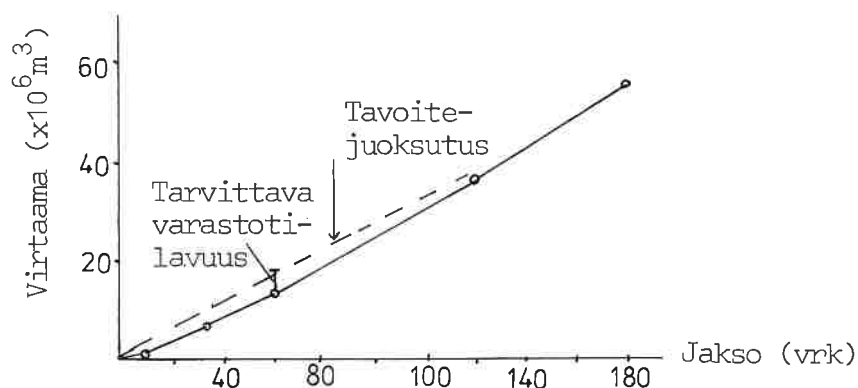
$$T_r = \frac{N+1}{m} \quad (\text{Weibull})$$

4. "Plotataan" saadut arvot toistuvuuspaperille ja piirretään niiden kautta viivat:

toistuvuus



5. Luetaan em. viivoilta tiettyä toistuvuutta vastaavat keskialivirtaamat. Piirretään uusi kuvio, johon saadut arvot asetetaan. Kuvion abskissana on jakson kesto (vrk) ja ordinaattana keskialivirtaama (tilavuusyksiköissä).
6. Lisätään tavoitejuoksutus ko. diagrammiin



7. Piirrettyjen viivojen suurin etäisyys on tarvittava varastotilavuus.

Tarvittavat oletukset:

1. Varaston oletetaan olevan kriittisen jakson alkaessa täysi.
2. Kriittisen jakson jälkeen sattuvat vedenpuutetilanteet jätetään pois tarkastelusta.

Rajoituksia:

1. Vaihtelevaa tavoitejuoksutusta on hankala käsitellä
2. Toistuvuuskäyrien käyttö aiheuttaa virheen varastotilavuudessa. Tästä syystä saatuun tilavuuteen tulee lisätä 10 %.
3. Menetelmässä ei voida ottaa huomioon haihdunnan muutosta.

Etuja:

1. Mikäli alivirtaaman toistuvuuskäyrät ovat jo olemassa, on menetelmä erittäin nopea ja yksinkertainen.

Summakäyrän käytön aiheuttamasta virheestä

Tarkastellaan seuraavaa esimerkkiä:

Järjestys	Virtaama m ³ /s		Veden puute m ³ /s, kun tavoitejuoksutus on 600 m ³ /s	
	5 päivän jakso	10 päivän jakso	5 päivän jakso	10 päivän jakso
1929	200	300	2 000	3 000 ¹
vuosi 1930	100	500	2 500 ²	1 000
1	100	300	2 500	3 000 ¹
järjestys 2	200	500	2 000 ²	1 000

Mikäli veden puute (tai varastotilavuus) arvot on pantu järjestykseen ajallisesti, on järjestys 3 000 ja 2 500. Mutta kun käytetään toistuvuuskäyriä, on järjestys 3 000 ja 2 000.

Näin aikaansaattava aliarviointi on suuruusluokkaa 10 %.

3.4 MENETELMIEN ARVIOINTI

Edellä läpikäydyt menetelmät jaettiin kolmeen ryhmään:

1. Menetelmiin, jotka indikoivat altaan täyttöastetta
2. Menetelmiin, jotka perustuvat vaihteluväliin
3. Menetelmiin, jotka perustuvat alivirtaamajaksojen tarkasteluun.

Toinen mahdollinen tapa olisi ollut erotella menetelmät sellaisiin, joissa voidaan ottaa huomioon veden riittämättömyyden todennäköisyys ja toisaalta sellaisiin, joissa tätä ei voida tehdä. Kun ensinmainittuja on pidettävä parempina, ovat summakäyrämenetelmät, Hurstin menetelmä, Thomas-Fiering-algoritmi ja Wait'in minimivirtaama epätyydyttäviä. Thomas-Fiering-algoritmi on epätyydyttävä vain, jos laskelma perustuu ainoastaan historialliseen sarjaan.

Kaikilla läpikäytyillä menetelmillä on heikkoutensa. Jokaisen heikkoutena on esimerkiksi se seikka, että altaan oletetaan olevan kriittisen jakson alussa täyden. Alexanderin, Dincer'in ja Gould'in Gamma menettelytavoissa oletetaan lisäksi, että vuoden ovat riippumattomia.

Dincer edellytti, että vuotuiset valumat ovat normaalijakautuneita; Alexander ja Gould edellyttivät taas gammajakautuneita virtaamia. Alivirtaamien toistuvuusanalyysiin perustuva menetelmä aliarvioi puolestaan varaston tarpeen.

Suosittelavimpana menettelytapana voitaneen pitää analyyttistä menetelmää (simulointi). Myös Gouldin ja Alexanderin menetelmät ovat suositeltavia, kun operoidaan vuosiarvoilla, mutta niitä käytettäessä tulisi ensin testata gammajakautuman sopivuus vuosivalumien jakaantumisen mallina.

4. STOKASTINEN VARASTOTEORIA

Perusteos: Moran, P.A.P., 1959. The Theory of Storage. Methuen. London

Moranin kehittämät menetelmät voidaan jakaa kolmeen ryhmään:

1. Menetelmät, joissa sekä aikaa että tilavuutta tarkastellaan jatkuvina muuttujina. Yleisin jatkuva-aikamalli on ns. "random buckets in the bath". Tätä Moran kuvailee mallina "... jossa mies kaatelee satunnaisina ajanhetkinä vettä sankoista ammeeseen, jossa ei ole korkkia". Näillä menetelmillä on vain teoreettista mielenkiintoa.

2. Menetelmät, joissa aikaa tarkastellaan epäjatkuvana, mutta vesitilavuutta jatkuvana. Myös näiden menetelmien käyttö on hankalaa.
3. Menetelmät, joissa sekä aika että tilavuudet ovat diskreettejä muuttujia. Tällaisesta lähtötilanteesta ovat syntyneet Moranin menetelmien käytännölliset sovellutukset.

Perusajatus on, että altaan tilavuus jaetaan osiin. Kaksi pääoletusta voidaan tehdä: Ensimmäinen, Moranin esittämä, on, että tulo- ja menovirtaama eivät tapahdu samaanaikaan. Tällainen malli "mutually exclusive"-malli (toisensa pois-sulkeva) on yksikkönä käytetty ajanjakso jaettu märkään jaksoon (vain tulovirtaama, ei menovirtaamaa), jota seuraa kuivajakso (ei tulovirtaamaa, vain menovirtaamaa).

Toinen vaihtoehtoinen malli perustuu oletukseen, että tulo- ja menovirtaama tapahtuvat yhtä aikaa. (ns. simultaneous-model).

Moranin menetelmillä on kuitenkin verrattain vakavia rajoituksia:

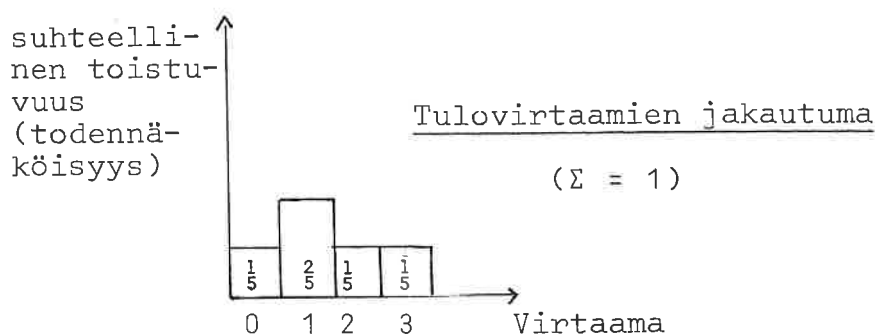
1. Tulovirtaamat oletetaan riippumattomiksi, joka ei pidä paikkaansa ainakaan kuukausijaksoa käytettäessä.
2. Menetelmien käyttö edellyttää vakiona pysyvää tavoitejuoksutusta; tosin se voi riippua varaston tilasta (mutta ei ajasta).
3. Realististen tapausten käsittely edellyttää tietokoneen käyttöä.

4.1 Yksinkertainen "mutually exclusive" -malli (Esimerkki)

Varastotilavuus: 2 yksikköä

Tavoitejuoksutus: 1 yksikkö/jakso

Tulovirtaamat: diskreettejä ja riippumattomia



Mallissa seuraavat yhtälöt pätevät:

$$Z_{t+1} = 0 \quad \text{jos } Z_t + X_t \leq M$$

$$Z_{t+1} = (Z_t + X_t) - M \quad \text{jos } M < Z_t + X_t < \kappa$$

$$Z_{t+1} = \kappa - M \quad \text{jos } \kappa \leq Z_t + X_t$$

Z_t = varastotilavuus jakson t alussa

Z_{t+1} = varastotilavuus jakson t lopussa
(tai jakson $t+1$ alussa)

κ = altaan kapasiteetti

X_t = tulovirtaama jakson t aikana

M = jakson lopussa tapahtuva vakiojuoksutus

Kun näin pitkälle on päästy, on seuraavana tehtävänä laatia varaston sisällön siirtymämatriisi. Siirtymämatriisilla esitetään, millä todennäköisyydellä eri lopputilat saavutetaan kullakin alkutilalla. Esimerkkimme siirtymämatriisi on (2x2)-matriisi

Alkutila Z_t

		Tyhjä 0	1	Täysi 2
Loppu- tila Z_{t+1}	Tyhjä 0	$\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	
	1	$\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$	$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$	
	Täysi 2			
	Σ	1	1	

HUOM. tulovirtaama ja menovirtaama tapahtuvat eri aikaan

Oletetaan seuraavaksi, että aikayksikkönä on vuosi ja että 2. yksikön allas on tyhjä vuoden $n:0$ 1 alussa. Toisin sanoen varastotilan todennäköisyysmatriisi alussa on

$$\begin{array}{l} 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 2 \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(tätä tilaa ei voida esimerkissä} \\ \text{koskaan saavuttaa)} \end{array}$$

$$\Sigma = 1$$

Koska siirtymämatriisi ilmaisee ehdollisen todennäköisyyden varaston lopputilalle (ts. "jos alkutila on tämä, on lopputilan todennäköisyys tuo"), voidaan lopputilan todennäköisyys saada kertomalla siirtymämatriisi ja alkutilan todennäköisyysmatriisi. Näin saadaan ensimmäisen vuoden lopputilanteen todennäköisyydeksi:

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \times 1 + 0.2 \times 0 \\ 0.4 \times 1 + 0.8 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = 1$$

Prosessi jatkuu: toisen vuoden lopussa:

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.44 \\ 0.56 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = 1$$

Kolmannen vuoden lopussa:

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.44 \\ 0.56 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.38 \\ 0.62 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = 1$$

Kahdeksannen vuoden lopussa:

$$\begin{bmatrix} 0.33 \\ 0.67 \end{bmatrix}$$

Yhdeksannen vuoden lopussa

$$\begin{bmatrix} 0.33 \\ 0.67 \end{bmatrix}$$

Havaitaan, että ratkaisu lähestyy stationääristä tilannetta, joka on riippumaton alkutilanteesta. Stationäärisen tilanteen vektori osoittaa, että todennäköisyys varaston tyhjentymiseen on $1/3$ minä tahansa vuonna.

4.2 Yksinkertainen "simultaneous" -malli (sama esimerkki kuin edellä)

Mallissa pätevät seuraavat yhtälöt:

$$\begin{aligned} Z_{t+1} &= 0 && \text{jos } Z_t + X_t \leq M \\ Z_{t+1} &= Z_t + X_t - M && \text{jos } Z_t + X_t - M < \kappa \\ Z_{t+1} &= \kappa && \text{jos } Z_t + X_t - M \geq \kappa \end{aligned}$$

ts. X_t ja M tapahtuvat samanaikaisesti

Siirtymämatriisi tulee tästä syystä muotoon:

		Alkutila Z_t		
		Tyhjä 0	1	Täysi 2
Loppu- tila Z_{t+1}	Tyhjä 0	$\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
	Täysi 2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$	$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$
	Σ	1	1	1

Tutkitaan seuraavaksi alkutilan vaikutusta varastotilan todennäköisyyteen.

Mikäli varasto on lähtötilanteessa tyhjä, saadaan:

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.60 \\ 0.20 \\ 0.20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.40 \\ 0.24 \\ 0.36 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.25 \\ 0.56 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0.25 \\ 0.62 \end{bmatrix}$$

1.vuosi 2.vuosi 5.vuosi stationäärinen tilanne

Alkutilanteessa täydelle varastolle saadaan:

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.20 \\ 0.80 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.24 \\ 0.72 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0.11 \\ 0.25 \\ 0.64 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0.25 \\ 0.62 \end{bmatrix}$$

1.vuosi 2.vuosi 5.vuosi stationäärinen tilanne

Voidaan havaita, että stationääriset tilat eivät ole riippuvaisia lähtötilanteesta.

Stationäärisen tilanteen laskentamahdollisuudet

Mikäli meillä on siirtymämatriisi laskettuna, meillä on valittavana kolme menetelmää stationäärisen tilan laskemiseksi:

1. Käytetään esimerkissä käytettyä menetelmää; ts. lasketaan varastotilan todennäköisyyttä vuosi vuodelta

$$[P]_{t+1} = [T] [P]_t, \text{ stationäärisessä tilanteessa } [P]_{t+1} = [P]_t.$$

2. Käytetään ns. "power-up" siirtymämatriisia:

$$[T]^m$$

$[T]$ = siirtymämatriisi

m = positiivinen kokonaisluku, joka on riittävän suuri, jotta tuloksena saatava matriisi olisi sama kuin stationäärisessä tilanteessa.

3. Kolmas tapa perustuu siihen, että stationäärisessä tilanteessa

$$[T] [P]_t = [P]_{t+1}$$

Edellä käydyssä esimerkissä ("simultaneous-model"), yhtälöt saavat tällöin muodon:

$$0.6 P_0 + 0.2 P_1 + 0 P_2 = P_0$$

$$0.2 P_0 + 0.4 P_1 + 0.8 P_2 = P_1$$

$$0.2 P_0 + 0.4 P_1 + 0.8 P_2 = P_2$$

Jotta saataisiin ratkaisu aikaan, on jokin yhtälöistä korvattava yhtälöllä

$$P_0 + P_1 + P_2 = 1$$

Ratkaisuksi saadaan $P_0 = 0.125$

$$P_1 = 0.250$$

$$P_2 = 0.625$$

4.3 Gould'in todennäköisyysmatriisimenetelmä

Gould muusi Moranin "simultaneous" -mallia sellaiseksi, että sekä vuodenaikaiset vaihtelut että sarjakorrelaatio saadaan huomioon- otetuksi. Hän käytti siirtymämatriisia vuosiarvoihin, mutta käsit- teli lyhytaikaisempia virtaamia simuloimalla.

Tässä menetelmässä varaston tilavuus ja tavoitejuoksutus oletetaan annetuksi ja veden riittämättömyyden todennäköisyys määrätään. Mikäli määrättävänä suurena on tavoitejuoksutus tai varaston koko, joudutaan turvautumaan iterointiin.

Vaiheet:

Tavoitteena on määrätä varastotilavuus, kun tavoitejuoksutus ja veden riittämättömyyden todennäköisyys annetaan:

1. Määrätään tavoitejuoksutus kuukausittain. Mikäli juoksutus riippuu varaston tilasta, määrätään tässä yhteydessä, kuinka se riippuu.
2. Määrätään veden riittämättömyyden todennäköisyys.
3. Arvataan ensimmäiseksi varastotilavuudeksi C_1 .
4. Konstruoidaan siirtymämatriisi.

Jaetaan varaston kapasiteetti C vyöhykkeisiin, joita olkoon K kappaletta (~ 20 kpl). Kunkin tilavuus saadaan lasketuksi kaavasta

$$W = \frac{C_1}{K-2}$$

kun otetaan huomioon ylin ja alin vyöhyke (joiden tilavuus olkoon 0).

5. Sovelletaan jatkuvuusyhtälöä ja käytetään yhden vuoden tiedot kerrallaan.

$$Z_{t+1} = Z_t + X_t - D_t$$

Z_{t+1} , Z_t = varaston sisältö kuukauden t lopussa ja alussa

X_t = tulovirtaama kuukauden t aikana

D_t = juoksutus kuukauden t aikana

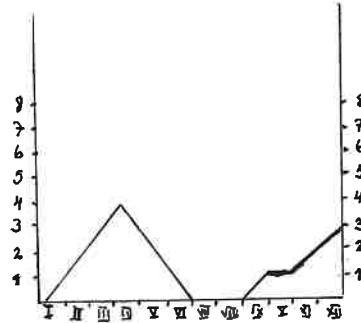
(Myös haihdunnassa tapahtuvat muutokset on otettava huomioon, mikäli niillä on merkitystä. Yhtälö tulee tällöin muotoon

$$Z_{t+1} = Z_t + X_t - D_t - \Delta E_t).$$

Vesitaseyhtälöä sovelletaan jokaisen vuoden (lukumäärä N) tietoihin kuukausi kuukaudelta, ja näin määrätään se vyöhyke, jossa varasto on vuoden lopussa. Tämä laskelma suoritetaan jokaiselle mahdolliselle aloitusvyöhykkeelle ja alku- ja lopputilanteesta laaditaan taulukko. Myös vuoden sisällä tapahtuneet varaston tyhjenemiset kirjataan ylös.

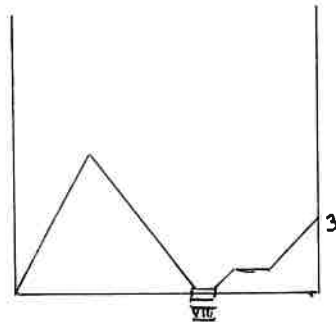
Menettelytavan kuvaamiseksi käydään läpi seuraava esimerkki:

- a) Sovelletaan jatkuvuusyhtälöä ensimmäiseen vuoteen olettamalla, että varasto on alussa tilassa 0. Suoritetaan laskelma kuukausi kuukaudelta, jolloin saadaan seuraava tulos:



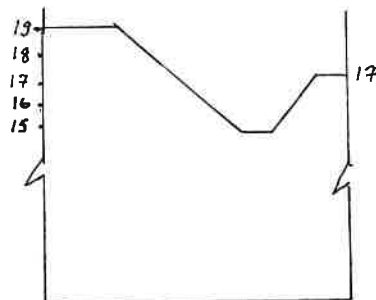
Varasto on siis vuoden lopussa vyöhykkeessä 3. ($Z_{t+1} = 3$).
Tulos kirjataan ylös.

- b) Seuraavaksi suoritetaan sama laskelma lähtemällä vyöhykkeestä 1.
Tulos on seuraava:



Havaitaan, että kun $Z_t = 1$ on $Z_{t+1} = 3$

- c) Näin käydään läpi kaikki vyöhykkeet. Olkoon viimeinen vyöhyke 19 (täysi allas).



Tässä tapauksessa $Z_{t+1} = 17$

Kun ko. laskelmat on suoritettu ja ruutuihin osuneet tilat laskettu yhteen, pitäisi tuloksena olla $N \times K$ -matriisi
(N -vuotta, K vyöhykettä).

6. Jaetaan kukin matriisin pystyriivi N :llä, jotta päästäisiin todennäköisyyksiin ja saataisiin siirtymämatriisi, joka ilmaisee altaan varastotilavuuden vuoden lopussa todennäköisyyssuhteena varastotilavuudesta vuoden alussa.
7. Siirtymämatriisin ohella on välttämätöntä estimoida veden riittämättömyyden todennäköisyyttä aloitusvyöhykkeen funktiona.

Kun tarkastellaan esimerkkiämme

tapauksessa 1 lähdettiin liikkeelle vyöhykkeestä 0 ja varasto oli tyhjä 2 kk.

tapauksessa 2 $Z_{\text{alku}} = 1$ ja varasto tyhjä 1 kk.

tapauksessa 3 $Z_{\text{alku}} = 19$ eikä kuivia jaksoja ollut.

Näistä tiedoista saadaan todennäköisyysvektori, jolla veden riittämättömyyden todennäköisyys on lausuttu aloitusvyöhykkeen funktiona.

8. Lasketaan stationäärisen tilan matriisi jollakin aiemmin esitellyistä menetelmistä.
9. Kerrotaan stationäärisen tilan matriisista tietyn vyöhykkeen todennäköisyys kohdassa 7 saadulla veden riittämättömyyden todennäköisyydellä.

Vyöhyke	Jonkin vyöhykkeen todennäköisyys stationäärinen tilanne	Todennäköisyys veden riittämättömyydelle	Tulo	
0	0.016	0.385	0.062	
1	0.017	0.154	0.0026	
2	0.064	0.051	0.0033	
3	0.094	0.026	0.0024	
4	0.202	0.026	0.0053	
5	0.216	0.000	0.0000	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
19	0.101	0.000	0.000	$\rightarrow \Sigma 0.020$

10. Mikäli veden riittämättömyyden todennäköisyys eroaa valitusta mitoitustodennäköisyydestä, valitaan uusi kapasiteetti ja laskelma toistetaan.

Tarpeellisia oletuksia:

1. Vuosivalumat ovat riippumattomat

Rajoituksia:

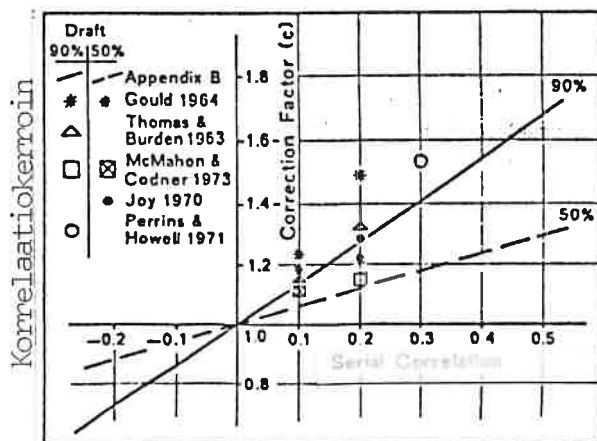
1. Ilman tietokonetta laskennasta ei tule mitään
2. Vuosivalumien riippumattomuus ei pidä läheskään aina paikkaansa.

Etuja:

1. Menettelytapa käy läpi kaikki laskennassa mukana olevat vuodet välittämättä niiden historiallisesta järjestyksestä.
2. Varaston alkutilanteella ei laskelmassa ole merkitystä
3. Havaintokatkoksista ei ole haittaa
4. Historiallisten virtaamien jakaumista ei tarvita arviointeja
5. Kuukausivalumien tilastolliset parametrit sarjakorrelaatiot tulevat laskelmassa automaattisesti huomioonotetuksi.
6. Todennäköisyys veden riittämättömyydelle lasketaan sekä stationääriselle tilanteelle että alkutilanteesta riippuvana ajan funktiona.
7. Vaihtelevat tavoitejuoksutukset voidaan helposti käsitellä.

HUOMAUTUS:

Mikäli vuosivalumat eivät ole riippumattomia on saatua tulosta korjattava korjauskertoimella C, joka saadaan allaolevasta kuvasta:



Sarjakorrelaatio

5. TULVA-ALTAAN MITOITUS

5.1 Mitoitustulvan laskentamahdollisuudet

Mitoitustulvan aiheuttajana voi olla joko

1. vesisade
2. lumen sulaminen

Suomen hydrologisilla olosuhteilla on muutamia merkittäviä ominaispiirteitä, joiden tiedostamatta jättäminen voi johtaa virheellisiin ratkaisuihin niin suunnittelussa kuin varsinkin hydrologisen tutkimuksen suuntaamisessa. Tärkeimmät näistä ovat:

1. suuri järviprosentti
2. lumi, routa
3. pieni saderankkuus

Merkittävin vaikutus käytettäviin hydrologisiin menetelmiin on ollut koko maailmaa tarkasteltaessa amerikkalaisten tekemillä tutkimuksilla. Tarkastellaan näitä seuraavaksi ja palataan sen jälkeen suomalaisiin olosuhteisiin.

USA:ssa ja yleensä koko maailmassa lähtökohtana on vesisade.

Ehkä vanhin käytetty menetelmä on laskea mitoitusvirtaama valunta-kerrointa, sateen intensiteettiä ja valuma-alueen pinta-alaa käyttäen (ns. rational method)

$$Q = c \cdot i \cdot A$$

Huomautuksia:

1. Jos intensiteetille on valittu jokin toistuvuus, ei Q välttämättä edusta samaa toistuvuutta
2. c:n arvon määrittäminen on erinomaisen vaikeaa (maaston epähomogeenisuus, maankosteus)
3. Intensiteettiarvo i on sellaisen sateen arvo, jonka kesto on yhtäpitkä kuin "time of concentration". Tämän ajan määrittäminen on vaikeaa, koska se riippuu valuma-alueen kosteustilasta sateen alkaessa.

Toinen tapa mitoitusvirtaaman laskentaan perustuu havaintoon, että valuntahuippu pienenee valuma-alueen pinta-alan kasvaessa.

$$q_{\max} = \frac{a}{A^b} \quad a, b = \text{kokeellisia parametreja}$$

$$\text{Kun } q_{\max} = Q_{\max}/A, \text{ saadaan } Q_{\max} = \frac{a}{A^{b-1}} = \frac{a}{A^c}$$

Toistumisaikaa N vuotta vastaavat kertoimet a ja c saadaan selville suorittamalla normaali toistuvuusanalyysi havaintoarvoja käyttämällä ja asettamalla valuma-alueiden pinta-alat vastaavien toistuvuusarvojen $[Q_N]$ kohdalle logaritmisella paperilla. Tällaisella paperilla edellinen yhtälö muodostaa suoran, koska

$$\log Q_{\max} = \log a - c \log A$$

Edellä käsiteltyt kaksi menetelmää eivät ole sovellettavissa allassuunnitteluun, vaan niitä voidaan käyttää mitoitettaessa silta-aukkoja, ojituksia ja sadevesiviemäreitä.

Allassuunnittelussa ei pelkkä huippuvirtaama riitä, vaan koko tulvavaluntakäyrä on pystyttävä konstruoimaan

Tilanne on parhaiten hallinnassa, jos itse havaintoalueelta on olemassa pitkä havaintosarja. Toiseksi paras on tilanne silloin, jos pitkät sarjat ovat saatavissa vertailukelpoisilta alueilta. Näiden avulla pystytään mitoistustulvakummun korkeus, tilavuus ja muoto yleensä toistuvuusanalyysin käytöllä ja eri menetelmillä määrittämään. Useasti tarkastelu on perustettu pelkästään virtaama-aineistosta saatuun informaatioon. Näissä tapauksissa on käytetty mm. seuraavia menetelmiä tulvakummun määrittämiseen:

Geometriset menetelmät

Yksinkertaisimmassa menetelmässä valuntakäyrää aproksimoidaan kolmiolla, jonka määräävät ylivirtaama $Q_{\max}$, vastaava tulvan volyyymi V ja suhde $t_1 : t_2$ [ajan t_1 tulva nousee, ajan t_2 laskee].

Ylivirtaama saadaan toistuvuusanalyysiä tai em. kokeellista kerroinkaavaa käyttämällä, tulvan volyymi saadaan valuntakerrointa ja valittua sadetapahtumaa käyttäen. Tulvan kesto $t = t_1 + t_2 = 2V/Q_{\max}$ ja suhde $t_1 : t_2$ riippuu valuma-alueen pinta-alasta A seuraavasti:

$t_1 : t_2$	A km ²
1 : 1	300...500
1 : 1,5	500...5 000
1 : 3	> 5 000

Menetelmästä on monia muunnoksia; valuntakumpua on kuvattu monilla monimutkaisemmilla tavoilla, esim. erilaisilla para-beleilla.

Korrelaatiomenetelmät

Jos riittävä määrä havaintoja on olemassa, voidaan laskea tulvan ominaisuuksien (ylivirtaama, tulvan kesto, muoto) väliset riippuvuudet.

Kun mitoitettaessa lasketaan tai valitaan ylivirtaama, saadaan muut ominaisuudet ko. riippuvuuksien avulla.

Saman todennäköisyyden menetelmät

Näissä menetelmissä lähdetään oletuksesta, että tulvan eri ominaisuudet noudattavat samaa toistuvuutta.

Neuvostoliitossa käytetään standardimenetelmänä erästä tähän ryhmään kuuluvaa menetelmää. Siinä ylivirtaaman ja tulvan volyymin ajatellaan toistuvan samalla tavoin ja havaittujen tulvakumpujen muodoista valitaan "mahdollisimman vaarallinen".

Pelkän virtaama-aineiston käsittelyn ohella voidaan käyttää hyväksi myös sadanta- ym. informaatiota. Tällöin ovat tärkeimpiä menetelmiä yksikkövaluntakäyrä ja simulointimallit. Nämä menetelmät, jotka ovat osoittautuneet erinomaisiksi hydrogisina ennusteina, kärsivät suunnittelumalleina lähinnä siitä, että toistumisaikojen käsittely on niissä hankalaa. Tämä hankaluus johtuu siitä, että

- niissä operoidaan sadannan intensiteetillä, jonka toistumisaika riippuu sateen kestosta
- yleensäkin on hankala arvioida malleissa olevien tekijöiden toistuvuutta ja vaikka nämäkin voitaisiin tehdä, on tuloksena olevan valuntakäyrän osalta tehtävä mahdoton. Luonnollisesti eri tekijöitä kombinoimalla on mahdollisuus saada tietyn tulvan (esim. kerran 50 vuodessa) todennäköisyysjakautuma.

Lähtökohtana ovat yleensä joko

1. Probable Maximum Precipitation (PMP)

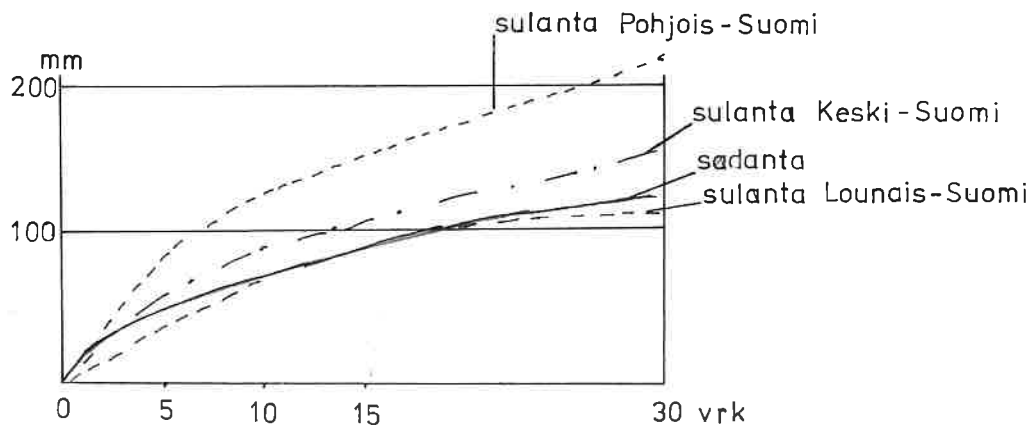
tai

2. Standard Project Storm (SPS)

Ensinmainittu määritellään tapahtumana, joka syntyy mielekkäiden meteorologisten olosuhteiden aiheuttamana maksimisadantana.

Viimemainittu on sade, joka saadaan muuntamalla suunnittelualueen läheisyydessä sattunut maksimisade kohdealueelle. (SPS on noin 50 % PMP:stä)

Suomessa sateen ottaminen mitoituksen pohjaksi tulva-allasta mitoitettaessa ei voida pitää erityisen onnistuneena, kuten seuraavasta kuvasta havaitaan:



Keskimääräinen maksimisadanta ja sulanta 1-30 päivän aikana (likimäärin)

Ylivaluman arvioinnissa meillä onkin perinteisesti lähdetty liikkeelle lumen vesiarvosta. Järvisyys vaikuttaa voimakkaasti ylivalumaan, samoin valuma-alueen pinta-ala. Keskiylivaluman arvioimiseksi on käytettävissä Kaiteran em. muuttujiin perustama nomogrammi, jonka antamat tulokset saadaan eri toistumisaikojen ylivalumiksi Niinivaaran laatimaa nomogrammia käyttämällä.

5.2 Altaan mitoitus

Tulvantorjunnan keinoja ovat:

- a) suojapenkereiden rakentaminen
- b) veden varastoiminen altaisiin

Huomionarvoista on, että molemmissa tapauksissa muutetaan virtaaman ajoitusta ja tämä voi vaikuttaa varsin haitallisesti alajuoksulla.

Tulvasuojelutoimenpiteiden laajuus riippuu suojeltavan kohteen luonteesta. Se on taloudellisessa mielessä optimointitehtävä ja toimenpiteillä pyritään mahdollisimman suureen tehokkuuteen. Mikäli ihmishengistä on kysymys, on nämä saatava säästetyksi kustannuksia minimoimalla.

Vesihuoltoaltaan ja tulvasuojelualtaan mitoituksen perusero on siinä, että edellisessä käytetään lähtökohtana koko virtaamasarjaa kun taas jälkimmäisessä tarkastellaan vain tulvatilannetta. Eri tulvatilanteiden oletetaan olevan ajallisesti siksi kaukana toisistaan, että varastotila ennätetään tulvatapahtumien välillä tyhjentää.

Tulva-altaan mitoitus tapahtuu vesitaseyhtälön perusteella ja ratkaisumenetelmä voi olla graafinen tai analyyttinen.

Tulva-allas voi olla luukuilla säädeltävissä tai menovirtaama riippuu altaan täyttöasteesta (veden korkeudesta).

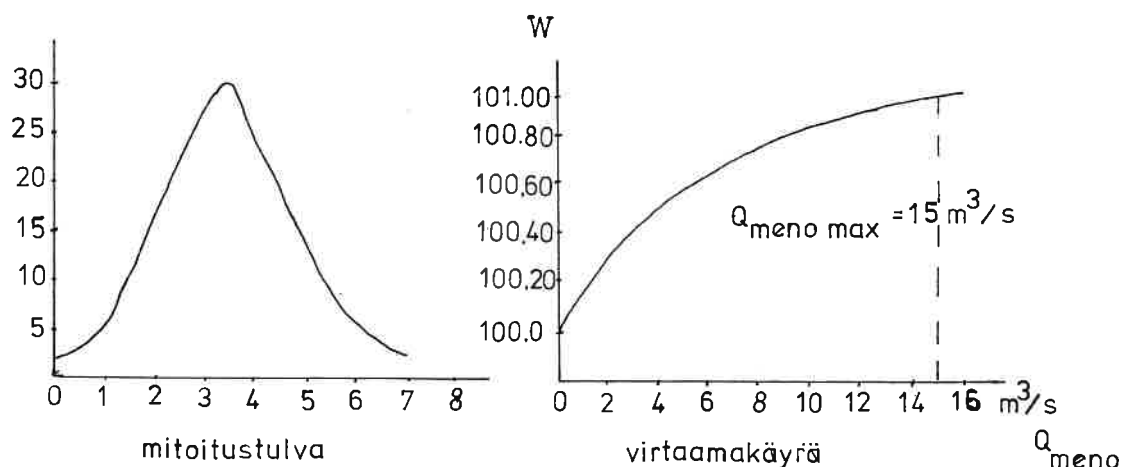
Suunnittelussa lähtötietona on aina mitoitus-*tulvakumpu*. Suunnittelu-*muuttujia* taas ovat

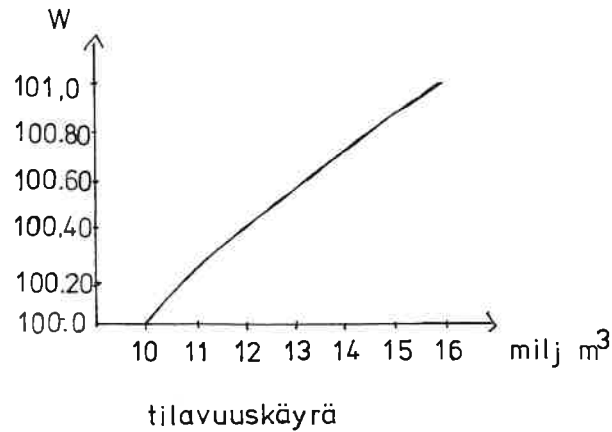
- altaan koko (vedenkorkeus-tilavuuskäyrä)
- menovirtaama (virtaamakäyrä, maksimimenovirtaama)

Näistä toinen on etukäteen päätetty ja toista haetaan.

Esimerkki 1:

Tarkastellaan seuraavaa täysin hypoteettista esimerkkiä:



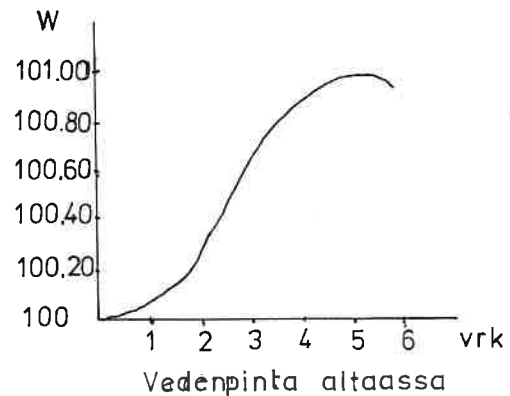
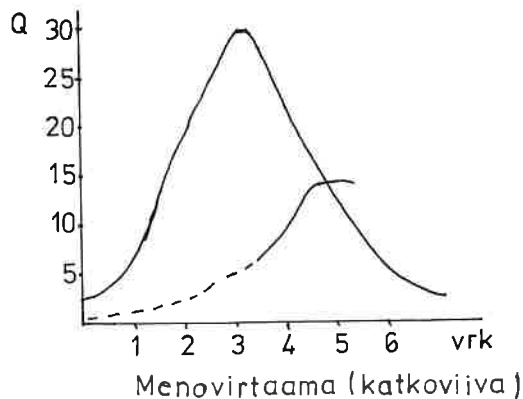


Tehtävä:

Tulvan alkaessa vesi on korkeudella 100.0, menovirtaama saa olla korkeintaan 15 m³/s. Kuinka korkealle vesi altaassa nousee, kuinka menovirtaama käyttäytyy.

Ratkaisu: (likimääräinen)

Aika vrk	Δt vrk	Keskim. Q m ³ /s	Jakson Q m ³	Arvio W Jakson lopussa	Keskim. Q_{meno} m ³ /s	Jakson Q_{meno}	Varaston lisäys	Varasto lopussa	W jakson lopussa	!
0				100.00				10000000		
0-1	1	3	260000	100.05	0.2	20000	240000	10240000	100.05	%
1-2	1	11	950000	100.20	1.0	90000	860000	11000000	100.20	%
2-3	1	27.5	2380000	100.60	3.0	260000	2120000	13120000	100.60	%
3-4	1	29	2510000	100.80	7.0	600000	1905000	15030000	100.90	%
				100.85	7.5	650000	1860000	14980000	100.85	%
4-5	1	18	1555000	100.95	13	1125000	430000	15400000	100.95	%
5-6	1	10	860000	100.90	14	1210000	-350000	15050000	100.90	%



Lähtökohtana ratkaisulle on differenttimuotoinen jatkuvuusyhtälö.

$$Q \Delta t - Q' \Delta t = \Delta S$$

$\uparrow$ tulovirtaama $\uparrow$ menovirtaama $\rightarrow$ varaston muutos

Tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$(Q - Q') \Delta t = S_{i+1} - S_i$$

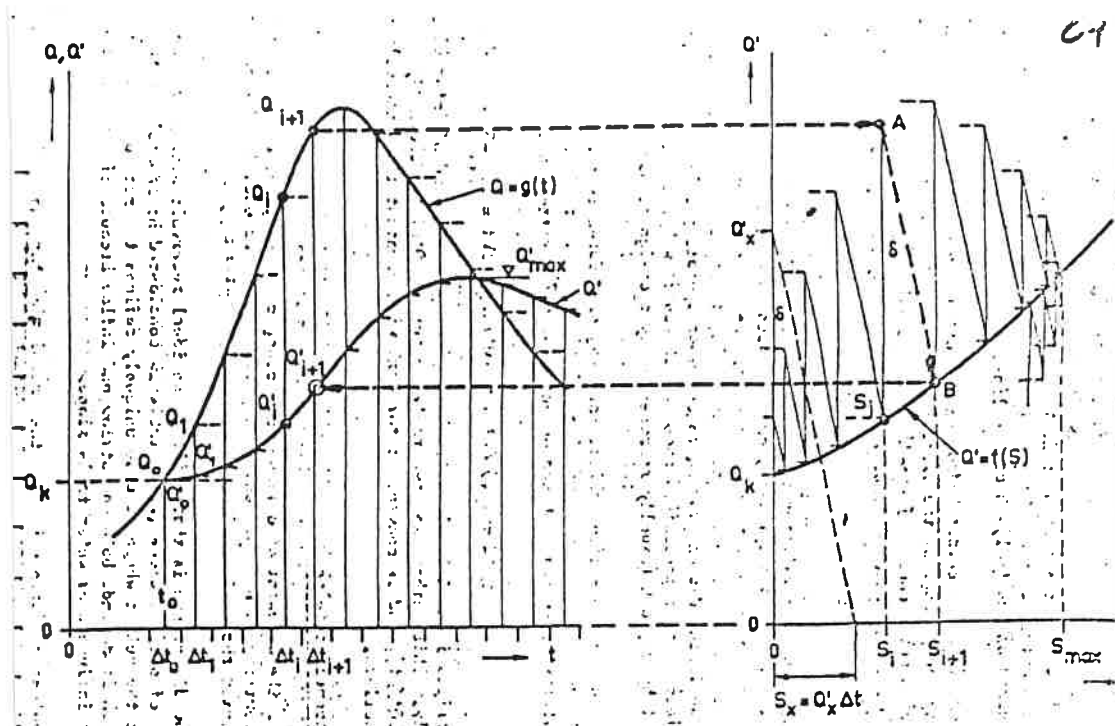
jossa S_i = varasto jakson i alussa

S_{i+1} = varasto jakson i lopussa

Esimerkki 2

Piirretään tulovaluntakäyrä ja varastotilan ja menovirtaaman yhteyden ilmaiseva käyrä rinnatusten siten, että virtaama-akselien suunta ja mittakaava ovat samat ja tulvavaraston nollakohta vastaa virtaaman kynnysarvoa Q_k . [ts. tulvavaraston täyttyminen alkaa vasta, kun virtaama ylittää arvon Q_k].

Piirretään vaakasuora pisteen Q_{i+1} kautta ja pystysuora pisteen S_i :n kautta. Näiden leikkauspiste on A. Piste B määrätään piirtämällä viiva, jonka kaltevuuden määrää kulma δ . B:n abskissa on sama kuin S_{i+1} :n ja siksi ordinaatta edustaa menovirtaamaa ajalla t_{i+1} . Piirtämällä vaakasuora viiva B:n kautta saadaan piste Q_{i+1} .



Menovirtaamakäyrän lisäksi saadaan selville myös tarvittava kokonaisvarastotilavuus $S_{\max}$.

Menetelmä on nopea ja sitä voidaan tarkentaa pienentämällä aika-askelta.

6. VIRTAAMATIETOJEN GENEROINTI

Historiallinen tausta

Hazen (1914) lienee ollut ensimmäinen, joka näki tarpeelliseksi käytettävissä olevan virtaamasarjan keinotekoisien pidentämisen. Hän yhdisteli normalisoituja vuosivirtaamia (14 jokea) ja tuotti tällä tavoin 300 vuoden havainnot. Altaan mitoitukseen Hazen käytti puoliäärettömän altaan menetelmää ja sai tällä tavoin kohtalaisia tuloksia.

Seuraava merkkimies generoinnin alalla oli Sudler (1927), joka kirjoitti 50 edustavaa vuosivirtaamaa korteille. Kortit sekoitettiin ja saatiin 50 vuoden jakso. Näin tehtiin 20 kertaa ja saatiin 1 000 vuoden virtaamahavainnot.

Barnes (1954) havaitsi erästä allasta mitoittaessaan Australiassa, että ko. vuosivalumat olivat normaalijakautuneita ja riippumattomia ja käytti Monte Carlo menetelmää generoiden 1 000 vuotta.

Hurst kehitti vuosina 1936-60 useita korttipelitekniikkoja kehittellessään Assuanin padon juoksutussääntöä.

6.1 Markov-malli vuosivalumille

Mikäli vuosivirtaaman todennäköisyysjakautuma on joku riippumaton edellisistä virtaamatapahtumista tai riippuu ainoastaan edellisestä tapahtumasta, meillä on kyseessä "yksinkertainen" Markov-prosessi viiveellä yksi. Nykyään käsitettä on laajennettu siten, että se kattaa myös prosessit, joissa viive on suurempi kuin yksi.

Brittan (1961) ehdotti seuraavaa Markov-mallia vuosivirtaamille:

$$x_{i+1} = \underbrace{\bar{x} + r_1 (x_i - \bar{x})}_{\text{deterministinen osa}} + \underbrace{t_i \cdot s \cdot (1-r_1^2)^{\frac{1}{2}}}_{\text{stokastinen osa}}$$

jossa x_{i+1} , x_i = valumat vuosina $i+1$ ja i

$\bar{x}$ = valumien keskiarvo

s = valumien standardipoikkeama

r_1 = 1. sarjakorrelaatiokerroin

t_i = satunnaismuuttuja, joka on jakautunut normaalisti keskiarvolla 0 ja varianssilla 1.

Näin saatu virtaama säilyttää historiallisen sarjan keskiarvon, standardipoikkeaman ja sarjakorrelaation.

Huomautuksia:

1. Vuosivalumien jakautuma oletetaan normaaliseksi
2. Tarvitaan satunnaislukugeneraattori (tietokoneissa on)
3. Kun laskenta aloitetaan, asetetaan $x_1 = \bar{x}$. Tästä syystä ainakin 10 ensimmäistä arvoa on jätettävä huomioonottamatta.
4. Malli voi tuottaa negatiivisia arvoja. Jos tällaista tapahtuu, on ko. negatiivista arvoa käyttäen laskettava seuraava arvo, jonka jälkeen se asetetaan nolllaksi.
5. Mikäli vuosivalumajakautuma ei ole normaalin, ei malli ole sopiva, vaan sitä on muunnettava.
6. Mallilla ei voida ottaa huomioon trendiä eikä jaksollisuutta. Vuodenaikaisjaksollisuus voidaan ottaa huomioon seuraavaksi esiteltävällä Thomas-Fiering-mallilla. Pitempiaikaisen jaksollisuuden ja voimakkaan trendin käsittelyssä on suuria vaikeuksia.

6.2 Thomas-Fiering-malli kuukausivalumille

$$x_{i+1} = \bar{x}_{j+1} + b_j(x_i - \bar{x}_j) + t_i s_{j+1} (1 - r_j^2)^{1/2}$$

jossa x_{i+1} , x_i = virtaamat kuukausien $(i+1)$ ja i aikana laskettuna generoinnin alusta

$\bar{x}_{j+1}$, $\bar{x}_j$ = kuukausien $(j+1)$ ja j keskivirtaamat ($1 \leq j \leq 12$)

b_j = pienimmän neliösumman keinolla laskettu regressio-kerroin, jonka avulla voidaan estimoida kuukauden $(j+1)$ virtaama kuukauden j virtaamasta

$$b_j = r_j \cdot \frac{s_{j+1}}{s_j}$$

t_i = normaalisesti jakautunut satunnaismuuttuja
(keskiarvo 0, varianssi 1)

s_{j+1}, s_j = kuukausivirtaamien x_{j+1}, x_j standardipoikkeamat
 r_j = kuukausivirtaamien x_{j+1}, x_j välinen korrelaatio-
kerroin

Thomas-Fiering-mallin lähtöoletuksena on, että virtaamat ovat normaalijakautuneita.

Mikäli vuosi- ja kuukausivirtaamat eivät ole normaalijakautuneita, on käytettävissä kolme vaihtoehtoa:

1. Muunnetaan satunnaismuuttujaa t_i ,
2. Muunnetaan virtaamaparametreja ja laskenta-algoritmeja siten, että lopullinen generoitu virtaama-aineisto jakautuu kuten laskelman pohjana oleva mitattu aineisto,
3. Generoidaan normaalijakautuneita virtaamia ja sovelletaan normalisointiyhtälöitä kääntäen.

6.21 t_i :n muuntaminen (Thomas, Burden 1963)

Menetelmässä muunnetaan normaalijakautunut t_i satunnaismuuttujaksi t_γ , joka on likipitään gammajakautunut ("like Gamma"). Ko. transformaatio suoritetaan Wilson'in ja Hilferty'n yhtälöä:

$$t_\gamma = \frac{2}{\gamma_{t,j}} \left[1 + \frac{\gamma_{t,j} t_i}{6} - \frac{\gamma_{t,j}^2}{36} \right]^3 - \frac{2}{\gamma_{t,j}}$$

jossa $\gamma_{t,j}$ = like Gamma-muuttujan vinous

$$t_i = N[0,1]$$

$$t_\gamma = \text{like } G[0,1,\gamma_{t,j}]$$

$$j = \text{jokin vuoden kuukausi } (1 \leq j \leq 12)$$

Jotta saataisiin generoituihin arvoihin sama vinous kuin mitä mitatussa sarjassa on, on $\gamma_{t,j}$ laskettava kaavasta:

$$\gamma_{t,j} = \frac{\gamma_{j+1} - r_j^3 \gamma_j}{(1 - r_j^2)^{\frac{3}{2}}}$$

jossa γ_{j+1}, γ_j = vinoudet kuukausien $j+1$ ja j virtaamissa

Kun po. menetelmää sovelletaan, t_i Thomas-Fiering-mallissa korvataan t_γ :lla.

Esimerkki:

Tammikuun virtaamien vinous on 1,8 ja helmikuun 1,1. Mainittujen kuukausien virtaamien välinen sarjakorrelaatio on 0.58. Kuinka muunnetaan normaalijakautuman satunnaisluku -0.4305 "like Gamma"-jakautuman satunnaisluvuksi.

$$\gamma_{t,j} = \frac{\gamma_{j+1} - r_j^3 \gamma_j}{(1-r_j^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1.1 - (0.58)^3 \cdot 1.8}{(1 - 0.58^2)^{\frac{3}{2}}} = 1.385$$

$$t_\gamma = \frac{2}{\gamma_{t,j}} \left[1 + \frac{\gamma_{t,j} t_i}{6} - \frac{\gamma_{t,j}^2}{36} \right]^3 - \frac{2}{\gamma_{t,j}}$$

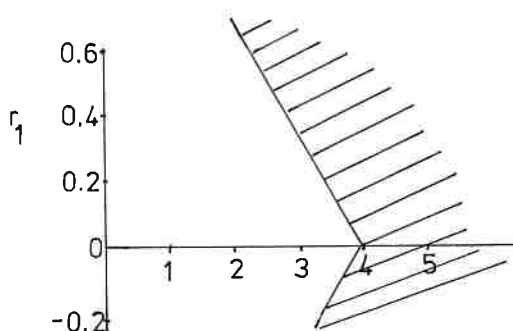
$$= \frac{2}{1.385} \left[1 + \frac{(1.385) - (-0.4305)}{6} - \frac{(1.385)^2}{36} \right]^3 - \frac{2}{1.385}$$

$$= \underline{\underline{-0.5655}}$$

Tällä tavoin saatuja satunnaislukuja voidaan sijoittaa suoraan Thomas-Fiering-malliin.

RAJOITUS:

Wilson'in ja Hilferty'n tranformaatio ei päde viivoitetulla alueella.



6.22 Matalasin menetelmä (1967)

Matalasin menetelmässä lähdetään oletuksesta, että virtaamien logaritmit ovat normaalijakautuneet. Ensiksi lasketaan logaritminen sarja käyttäen normaalijakautumamallia ja logaritmit muunnetaan sitten "todellisiksi" virtaamiksi. Menetelmän generointialgoritmi ja parametrien estimointikaavat ovat kolmiparametrinen log-normaali-mallia käytettäessä:

Generointialgoritmi:

$$\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_{j+1} + B_j (\bar{X}_i - \bar{X}_j) + t_i S_{j+1} (1 - R_j^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_{i+1} = A_{j+1} + \exp(\bar{X}_{i+1})$$

jossa $t_i = N[0,1]$

$\bar{X}_{i+1}$ = generoidun virtaaman logaritmi

x_{i+1} = generoitu "todellinen" virtaama

Muut symbolit: kts. jatko.

Parametrien estimointi:

$$\bar{x}_j = A_j + \exp(0.5 S_j^2 + \bar{X}_j) \quad (1)$$

$$s_j^2 = \exp[2(S_j^2 + \bar{X}_j)] - \exp(S_j^2 + 2\bar{X}_j) \quad (2)$$

$$g_j = \frac{\exp[3 S_j^2] - 3\exp[S_j^2] + 2}{\{\exp[S_j^2] - 1\}^{\frac{3}{2}}} \quad (3)$$

$$r_j = \frac{\exp[S_j S_{j+1} R_j] - 1}{\{\exp[S_j^2] - 1\}^{\frac{1}{2}} \{\exp[S_{j+1}^2] - 1\}^{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

jossa	mitattu	logaritminen
	sarja	sarja
keskiarvo	$\bar{x}_j$	$\bar{X}$
standardipoikkeama	s_j	S_j
vinous	g_j	(A_j)
sarjakorrelaatio viiveella 1 ja	r_j	R_j

$$B_j = R_j \left[\frac{S_{j+1}}{S_j} \right]$$

Parametrien A_j , $\bar{X}_j$, S_j ja R_j ratkaisu aloitetaan yhtälöstä (3) ja ratkaistaan S_j . Tähän tarvitaan iteratiivista menetelmää. Tällaisena menetelmänä tulee kyseeseen mm. Newton-Raphson-menetelmä. Kun S_j on määrätty, käytetään yhtälöjä (1), (2) ja (4), jolloin saadaan $\bar{X}_j$, A_j ja R_j .

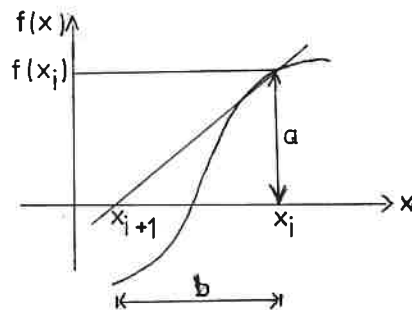
Newton-Raphson-menetelmä, jolla S_j voidaan ratkaista on seuraavanlainen:

Tehtävä:

Ratkaise millä x :n arvolla $f(x) = 0$

Vaiheet:

1. Arvataan, että ratkaisu on x_i



$$f'(x_i) = \frac{df(x)}{dx} = \text{tangentin kaltevuus pisteessä } x = x_i$$

$$= \frac{a}{b} = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

$$\therefore x_i - x_{i+1} = \frac{f(x_i)}{f'(x)}$$

$$\text{joten } x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

2. Mikäli $x_{i+1} - x_i$ ylittää sallittavan virheen, laskelmaa jatketaan ja määrätään x_{i+2} jne.

Em. menettelytavan soveltaminen yhtälöön (3) tapahtuu seuraavasti:

$$f(S^2) = \exp(3 S^2) - 3 \exp(S^2) + 2 - g [\exp(S^2) - 1]^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{ja } f'(S^2) = 3\exp(3 S^2) - 3\exp(S^2) - \frac{3}{2}g [\exp(S^2) - 1]^{\frac{1}{2}} \exp(S^2)$$

6.23 Virtaamien normalisointi (Beard 1972)

Periaate ilmennee seuraavasta vuosivirtaamille tarkoitetusta esityksestä:

1. Virtaamien mahdolliset nolla-arvot eliminoidaan teke-
mällä pienehkö lisäys virtaama-arvoihin. Tämän jälkeen
lasketaan näin saaduista luvuista logaritmit.
2. Log-arvoille lasketaan keskiarvot, standardipoikkeamat
ja vinoudet.
3. Suoritetaan log-arvojen standardisointi:

$$v = \frac{y - \bar{y}}{S_y}$$

jossa v = standardisoitu log-virtaama

$y = \ln(x + \epsilon)$

$\bar{y}$ = keskiarvo virtaamista $\ln(x + \epsilon)$

S_y = standardipoikkeama virtaamista $\ln(x + \epsilon)$

x = mitattu virtaama

ϵ = pienehkö lisäys

4. Normalisoidaan standardisoidut arvot eliminoimalla vinoudet
käyttämällä käänteistä Wilson-Hilferty -transformaatiota:

$$v = \frac{6}{g} \left\{ \left(\frac{g}{2} v + 1 \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right\} + \frac{g}{6}$$

jossa v = normalisoitu arvo

g = log-arvojen vinous

5. Lasketaan normalisoitujen arvojen sarjakorrelaatiot
6. Generoidaan standardisoitua sarjaa normaalijakautunutta
Markov-prosessia käyttäen.

$$v_{i+1} = r v_i + t_i (1 - r^2)^{\frac{1}{2}}$$

jossa v_{i+1} , v_i = generoituja, normalisoituja muuttujia N

r = sarjakorrelaatio (viive 1)

t_i = satunnaismuuttuja $N[0,1]$

7. Sovelletaan käänteistä transformaatiota seuraavasti:

$$v = \left\{ \frac{g}{6} (v - \frac{g}{6}) + 1^3 - 1 \right\} \frac{2}{g}$$

$$x = \exp (\bar{y} + v Sy)$$

8. Vähennetään pieni lisäys (ϵ). Mikäli negatiivisia virtaamia esiintyy, ne asetetaan nolllaksi.

6.3 Kaksirivimalli

Kuukausimallit eivät välttämättä säilytä vuosivirtaamien ominaisuuksia. Tätä puutetta välttääkseen Harms ja Campbell (1967) menettelivät seuraavasti:

Vuosivirtaamat generoitiin käyttämällä normaalijakautunutta Markov-mallia. Thomas-Fiering-mallia taas käytettiin kuukausivirtaamien generointiin, mutta saatuja arvoja korjattiin seuraavalla algoritmilla:

$$x_{ij}^? = \frac{x_{ij}}{\sum_{j=1}^{12} x_{ij}} Q_i$$

jossa $x_{ij}^?$ = korjattu kuukausiarvo

x_{ij} = korjaamaton kuukausiarvo

Q_i = vuosiarvo

i = vuosi

j = kuukausi ($1 \leq j \leq 12$)

Mallien hyvyyden arvostelusta

Generoidun aineiston tulisi käydä läpi ainakin seuraava tarkistusmenettely:

1. Tarkistetaan, että generoiduissa sarjoissa keskiarvot, standardi-
poikkeamat, vinoudet ja sarjakorrelaatiot ovat samat kuin historiallisessa sarjassa (vertailussa on käytettävä samanpituisia sarjoja).

2. Vertaillaan generoitujen sarjojen pysyvyys- ja toistuvuuskäyriä historiallisen sarjan vastaaviin käyriin.
3. Vertaillaan korrelogrammeja.

Muita malleja

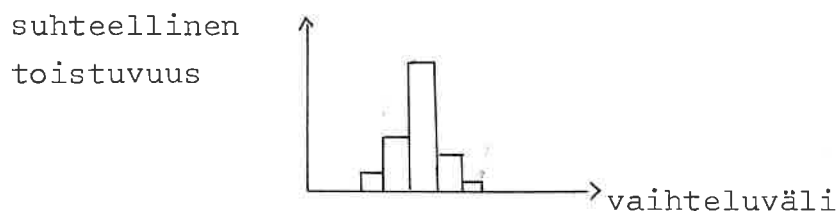
Markovin mallia käytettäessä Hurstin kerroin lähenee arvoa 0.5, joka siis poikkeaa melkoisesti kertoimen empiirisestä arvosta 0.72.

Tästä syystä on kehitetty joukko ns. pitkämuistisia malleja, joista tunnetuimmat ovat

- ARIMA-malli
- Broken line-malli
- Fractional-Gaussian-Noise-malli

Koska generointia tulisi käyttää?

Altaan varastotilavuutta mitoitettaessa tarjoavat generoidut sarjat virtaamatapahtumia, joiden esiintymistodennäköisyys on yhtä suuri. Kun eri sarjoja käyttäen lasketaan tarvittava varastotilavuus, saadaan tulokseksi varastotilavuuden todennäköisyysjakautuma:



Suunnittelija saa generoitua tietoa käyttäessään kuvan tarvittavan varastotilavuuden vaihtelevuudesta ja voi näin valita hyväksyttävän riskitason.

Generoitaessa ei luoda informaatiota, mutta sen avulla käytettävissä oleva informaatio käytetään paremmin hyväksi.

Jos generointia käytetään, varaston kokoa koskevat laskelmat on syytä suorittaa käyttäen analyttistä menetelmää tai "sequent-peak-algorithm" -menetelmää.

Yleensä 25 generoitua sarjaa on riittävä määrä. Alkutilanteen merkityksen vähentämiseksi on syytä jättää joitakin kymmeniä vuosia sarjan alusta huomioon ottamatta.

Usean yhtäaikaisen virtaamasarjan generointi

Menetelmiä on useita, mutta tässä käydään läpi vain yksi; ns. avain-
aseman käyttö:

Avainasemamenetelmässä valitaan jokin virtaamamittauspaikka, jolle generoidaan normaalitavalla virtaamat. Muiden paikkojen virtaamat on estimoitu regressioyhtälöillä, joissa avainaseman virtaamat ovat riippumattomina muuttujina. Regressioalgoritmit sisältävät satunnaistermin, jolla pyritään ottamaan huomioon avainaseman ja muiden asemien virtaamasarjojen keskinäiset vaihtelut.

Tämän menettelytavan huono puoli on siinä, että se ottaa huomioon sarjakorrelaatiot ainoastaan avainasemalla. Kuitenkin voidaan syystä väittää, että verrattuna mahdolliseen väärään jakaumatyyppiin koko generoinnin pohjana, on näin aiheutettu virhe yleensä vähäinen.

7. OPTIMOINTIOPIN PERUSTEITA

Mitä on operaatioanalyysi?

Käytännön monimutkaisten ongelmien ratkaisemista matemaattisten menetelmien avulla.

Tutkittavasta ongelmasta muodostetaan matemaattinen malli. Mallin ratkaisemisella tarkoitetaan sellaisen toimintastrategian hakemista, joka täyttää annetut vaatimukset ja samalla antaa parhaan mahdollisen toimintavaihtoehdon.

Operaatioanalyysin käyttö alkoi toisen maailmansodan aikana. Nykyään se on levinnyt kaikille aloille.

7.1 Matemaattinen optimointi

Tehtävä: Luvuille $x_1, x_2, \dots, x_n$ on valittava sellaiset arvot, että funktio $f(x_1, \dots, x_n)$ saa maksimin, kun rajoitusehtoina ovat:

$$g_1(x_1, \dots, x_n) \leq 0$$

$$g_2(x_1, \dots, x_n) \leq 0$$

$$\vdots$$

$$g_m(x_1, \dots, x_n) \leq 0$$

Luvut $x_1, \dots, x_n$ ovat PÄÄTÖSMUUTTUJIA

Funktio $f(x_1, \dots, x_n)$ on KOHDEFUNKTIO

Esimerkki: Maksimoi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ siten, että rajoitukset

$$x_1 \leq 1$$

$$2x_2^2 + x_3^2 \leq 2 \quad \text{ovat voimassa.}$$

Toisin sanoen

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{ja}$$

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 1 \leq 0$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = -x_1 - 1 \leq 0$$

$$g_3(x_1, x_2, x_3) = 2x_2^2 + x_3^2 - 2 \leq 0$$

Muuttujien $x_1, x_2, \dots, x_n$ sellaisten arvojen joukkoa, jotka toteuttavat rajoitukset, kutsutaan SALLITUKSI ALUEEKSI

Esimerkissämme sallittu alue on elliptinen sylinteri, jonka vaipan määrittelee $2x_2^2 + x_3^2 = 2$ ja päätyjä tasot $x_1 = 1$ ja $x_1 = -1$.

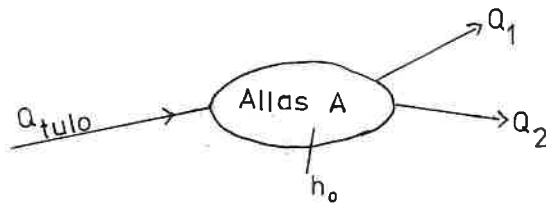
Muotoa $f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ olevia kohdefunktioita kutsutaan LINEAARISIKSI muita EPÄLINEAARISIKSI. Rajoitukset voivat olla joko lineaarisia tai epälineaarisia. Lineaarinen tilanne on oleellisesti miellyttävämpi käsitellä.

Matemaattinen malli

Mikäli suunnittelutehtävään halutaan soveltaa matemaattista optimointia, on tehtävälle määriteltävä muuttujat sekä laadittava kohdefunktio ja rajoitusehdot. Tätä varten tutkittava systeemi on saatava MATEMAATTISEN MALLIN muotoon.

1. Valitaan parametrit, jotka ovat tehtävän kannalta oleelliset:
 - kontrolloitavat l. PÄÄTÖSMUUTTUJAT
 - kontrolloimattomat, joihin päätösmuuttujien arvot vaikuttavat l. TILAMUUTTUJAT
 - kontrolloimattomat, jotka eivät riipu päämuuttujista l. STOKASTISET PARAMETRIT
 - FYSIKAALISET VAKIOT
2. Lausutaan tilamuuttujat päätösmuuttujien, stokastisten parametrien ja fysikaalisten vakioiden avulla.
3. Otetaan mukaan parametrien rajoitukset.

Esimerkki: Varastoaltaasta on johdettava vettä kahdelle alueelle



1. Päätösmuuttujat: Q_1, Q_2
 Tilamuuttujat: altaan vedenpinnan korkeus jakson lopussa h

$$h = h(Q_{tulo}, Q_1, Q_2, h_0)$$

 Stokastinen parametri: Q_{tulo}
 Fysikaaliset vakiot: A, h_0

2. Lausutaan h muiden avulla

$$h = h_0 - \frac{1}{A} (Q_1 + Q_2 - Q_{tulo})$$

3. Fysikaalisista syistä rajoitukset

$$\begin{aligned} Q_1 &\geq 0 \\ Q_2 &\geq 0 \\ h &\geq h_{min} \end{aligned}$$

Kohdefunktion muodostaminen

Esimerkki: Kastelualtaasta, jonka tilavuus on V , johdetaan vettä alueille A_1 ja A_2 .

A_1 :n tuotos riippuu vesimäärästä:

$$t_1 = c_1 v_1 (d_1 - v_1), \quad 0 \leq v_1 \leq d.$$

v_1 = vesimäärä

c_1, d_1 = kokemusperäisiä vakioita

A_2 :n tuotos vastaavasti:

$$t_2 = c_2 v_2 (d_2 - v_2), \quad 0 \leq v_2 \leq d$$

Katetuotot alueilta ovat r_1 ja r_2 mk/ha

KOHDEFUNKTIO:

$$f(v_1, v_2) = A_1 r_1 c_1 v_1 (d_1 - v_1) + A_2 r_2 c_2 v_2 (d_2 - v_2)$$

(tässä ei tilamuuttujia tarvitse eliminoida)

Rajoitukset:

$$v_1 \leq d_1, -v_1 \leq 0, v_2 \leq d_2, -v_2 \leq 0, v_1 + v_2 \leq V$$

RATKAISUMENETELMÄT

Optimin hakemiseksi on käytettävissä useita menetelmiä, kuten

- analyttiset menetelmät
- Lagrangen kertojien käyttö
- gradienttimenetelmät
- lineaarinen optimointi
- dynaaminen optimointi
- jne.

Käytännössä kyseeseen tulevat lähinnä lineaarinen ja dynaaminen optimointi.

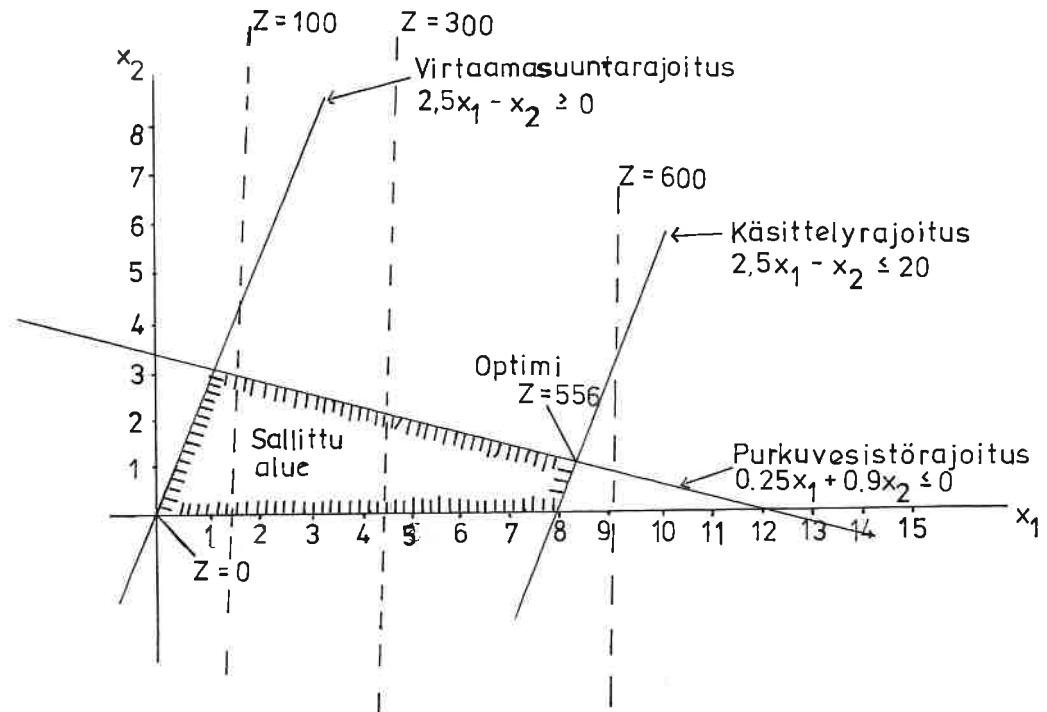
c) jätteen menosuunta on vesistöön päin

$$2.5x_1 - x_2 \geq 0$$

d) päätösmuuttujat eivät saa olla negatiivisia

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Esimerkkimme tehtävä voidaan ratkaista graafisesti:



Kuviosta havaitaan, että optimipiste, jossa $Z = 556$ saavutetaan pisteessä $(x_1, x_2) = (8.4, 1)$. Edullisinta on siis valmistaa 8.4 tuotetta ja laskea vesistöön käsittelemättä 1 jäteyksikkö.

Lineaarisen optimoinnin (ohjelmoinnin) tehtävä on seuraava:

$$\text{maksimoi } f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n$$

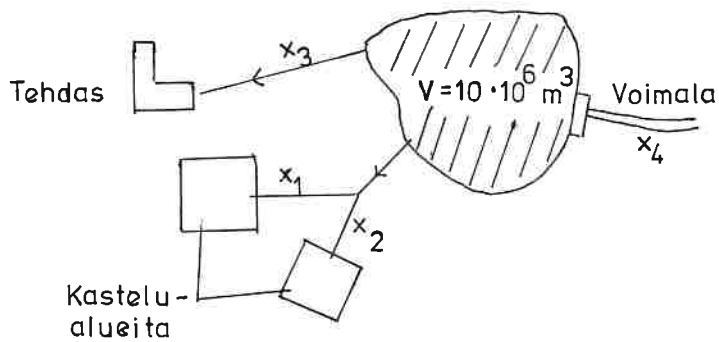
$$\text{rajoituksin } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

Lineaarinen estimointi hallitaan hyvin: yleensä kaikissa tietokoneissa on sitä varten kirjasto-ohjelmat.

ESIMERKKI 2

Viikon aikana on käytettävissä varastotilavuus $10 \cdot 10^6 \text{ m}^3$.

- kasteluhyöty 2 p/m^3 (x_1 ja x_2)
- tehtaan hyöty 0.5 p/m^3 (x_3)
- voimala 1 p/m^3 (x_4)

Rajoitukset:

$$\begin{aligned}
 x_1 &\leq 6 \cdot 10^6 \text{ m}^3, & x_2 &\leq 4 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \\
 x_1 + x_2 &\leq 8 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \\
 10^6 \text{ m}^3 &\leq x_3 \leq 2 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \\
 x_4 &\leq 8 \cdot 10^6 \text{ m}^3
 \end{aligned}$$

Tehtävän formulointi:

Kohdefunktio $f = 2x_1 + 2x_2 + 0.5x_3 + x_4$

Rajoitusepäyhtälöt:

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \leq 10 \cdot 10^6 \\
 x_1 & \leq 6 \cdot 10^6 \\
 x_2 & \leq 4 \cdot 10^6 \\
 x_1 + x_2 & \leq 8 \cdot 10^6 \\
 x_3 & \leq 2 \cdot 10^6 \\
 -x_3 & \leq -1 \cdot 10^6 \\
 x_4 & \leq 8 \cdot 10^6
 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l}
 x_1 \geq 0 \\
 x_2 \geq 0 \\
 x_3 \geq 0 \\
 x_4 \geq 0
 \end{array} \right.$$

Matriisimuodossa: maksimoitava $f = \underline{c} \underline{x}$ rajoituksin $\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}$:

$$\max(2, 2, \frac{1}{2}, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ rajoituksin } \begin{pmatrix} 1, 1, 1, 1 \\ 1, 0, 0, 0 \\ 0, 1, 0, 0 \\ 1, 1, 0, 0 \\ 0, 0, -1, 0 \\ 0, 0, 0, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \cdot 10^6 \\ 6 \cdot 10^6 \\ 4 \cdot 10^6 \\ 8 \cdot 10^6 \\ -1 \cdot 10^6 \\ 8 \cdot 10^6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Käytännössä tietokoneohjelmat ratkaisevat lineaarisen optimoinnin tehtävät numeerisella algoritmilla, jota kutsutaan simplex-algoritmiksi.

Jokaiseen lineaariseen optimointitehtävään liittyy ns. duaalitehtävä, joka on myös lineaarinen. Se muodostuu samoista parametreista kuin alkuperäinen tehtävä, mutta parametrin roolit ovat vaihtuneet.

Lineaarisen optimointitehtävän:

$$\text{maksimoi } f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$\text{rajoituksin } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

tai matriisimuodossa

$$\text{maksimoi } f = \underline{c} \underline{x}$$

$$\text{rajoituksin } \underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}$$

duaalitehtävä, jossa muuttujia on merkitty y_2 :llä, on seuraava

$$\text{minimoi } g = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$$

$$\text{rajoituksin } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

tai matriisimuodossa

$$\text{minimoi } g = \underline{b} \underline{y}$$

$$\text{rajoituksin } \underline{A} \underline{y} \geq \underline{c}, \underline{y} \geq \underline{0}$$

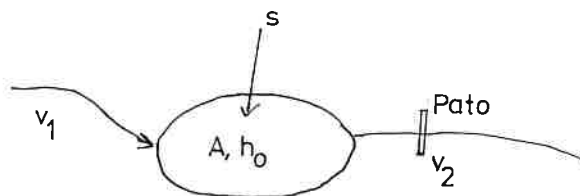
Duaalisuuden käytännön merkitys on lähinnä siinä, että jomman kumman tehtävän ratkaisusta saadaan helposti toisen tehtävän ratkaisu. Näinollen tehtävästä tarvitsee ratkaista vain se joka on helpompi.

Esimerkki 1:n duaalitehtävä kuuluu

minimoi $T = 20y_1 + 3y_2$

$$\text{rajoituksin } \begin{cases} 2.5y_1 + 0.25y_2 \geq 66.5 \\ -y_1 + 0.9y_2 \geq -2.6 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

7.12 DYNAAMINEN OPTIMOINTI



päätösmuuttujat : v_2

stokastiset parametrit: v_1, s

fysikaaliset vakiot: A, h_0

tilamuuttuja h_1 määräytyy em. parametreista:

$$h_1 = h_0 + \frac{1}{A} (v_1 + s - v_2)$$

Edellä käsitellyissä optimointimenetelmissä tilamuuttujat lausuttiin päätösmuuttujien avulla, lausekkeet sijoitettiin kohdefunktioon sekä rajoitusehtoihin. Tilamuuttujat saatiin näin eliminoidua ja ongelmat palautuivat standardimuotoon:

maksimoi $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

rajoituksin $g_1(x_1, \dots, x_n) \leq 0$

$\vdots$

$g_m(x_1, \dots, x_n) \leq 0$

DYNAAMINEN OPTIMOINTI ON TÄSTÄ SÄÄNNÖSTÄ POIKKEUS: SIINÄ TILAMUUTTUAJAT OVAT EKSPLISIITTISESTI MUKANA RATKAISUN KAIKISSA VAIHEISSA:

Dynaaminen optimointi on kehitetty erityisesti moniasteisten päätöksentekoprosessien ratkaisuun.

Sen formulointi voidaan esittää yksinkertaisimmin seuraavasti:

Meillä on yksi päätösmuuttuja x
 ja yksi tilamuuttuja h
 toimintajaksoja on n kpl

Tilamuuttujan arvo ensimmäisen jakson alussa on h_0 . Tilamuuttujan arvo i :n jakson lopussa, h_i , määräytyy arvosta h_{i-1} ja päätösmuuttujan arvosta x_{i-1} . Toisin sanoen

$$h_i = f_i(x_{i-1}, h_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Kullakin jaksolla on oma kohdefunktionsa $F_i(x_{i-1}, h_i)$, joka siis riippuu päätös- ja tilamuuttujan saamista arvoista. Koko tehtävän kohdefunktio on jaksojen kohdefunktion summa:

$$F = F_1(x_0, h_1) + F_2(x_1, h_2) + \dots + F_n(x_{n-1}, h_n)$$

Kullakin jaksolla sekä päätös- että tilamuuttujien on toteutettava annetut rajoitukset.

Tehtävä on seuraava:

$$\begin{aligned} \text{maksimoi } F &= \sum_{i=1}^n F_i(x_{i-1}, h_i) \\ \text{rajoituksin } x_{i-1} &\in \bar{X}_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots, n \\ h_i &\in H_i \\ h_0 &\text{ on annettu ja } h_i = f_i(x_{i-1}, h_{i-1}) \\ &\quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Dynaamisen optimoinnin suoritus selvinnee seuraavasta:

Meillä on 3 jaksoa ja kolme päätösmuuttujaa x_0, x_1, x_2 ja kolme tilamuuttujaa h_1, h_2, h_0 . Alkutila $h_0 = 2$. Tiloja ohjataan yhtälöiden

$$h_1 = f_1(x_0, h_0) = x_0 + h_0$$

$$h_2 = f_2(x_1, h_1) = x_1 + h_1$$

$$h_3 = f_3(x_2, h_2) = x_2 + h_2$$

avulla. Ohjausrajoitukset ovat

$$x_0 \in \bar{x}_0 = \{-1, 0, 1\}$$

$$x_1 \in \bar{x}_1 = \{-1, 0, 1\}$$

$$x_2 \in \bar{x}_2 = \{-1, 0, 1\}$$

Tilarajoituksia ei ole

Kohdefunktio, joka halutaan minimoida, on

$$\begin{aligned} F &= F_1(x_0, h_1) + F_2(x_1, h_2) + F_3(x_2, h_3) \\ &= x_0^2 + (h_1 - 2)^2 + x_1^2 + (h_2 - 4)^2 + x_2^2 + (h_3 - 1)^2 \end{aligned}$$

Ongelman ratkaisu tapahtuu lopusta päin. Viimeinen päätösmuuttuja vaikuttaa vain viimeisellä jaksolla kohdefunktioon eli termiin $x_2^2 + (h_3 - 1)^2$. Nyt voidaan määrätä paras x_2 h_2 :n funktiona $x_2^*(h_2)$. Kun muistetaan, että x_2 voi saada vain arvot $-1, 0, 1$, voidaan $F_s = x_2^2 + (h_s - 1)^2$ helposti minimoida h_2 :n funktiona:

h_2	$x_2(h_2)$	$F_3(h_2)$
-2	1	5
-1	1	2
0	1 tai 0	1
1	0	0
2	0 tai -1	1
3	-1	2
4	-1	5

Yllä on esitetty joitakin h_2 :n arvoja sekä näihin liittyvät paras $x_2^*(h_2)$ sekä optimikustannuksen loppupää $F_3^*(h_2)$.

Otetaan askel taaksepäin. Jos toisen jakson alussa tilamuuttuja on h_1 ja jos tehdään päätös x_1 , on jakson kustannus $F_2 = x_1^2 + (h_2 - 4)^2 = x_1^2 + (x_1 + h_1 - 4)^2$ ja jakson päätyttyä $h_2 = h_1 + x_1$. Optimikustannus tästä loppuun on $F_3^*(h_1 + x_1)$. Paras päätös on siis se, joka minimoi näiden summan $x_1^2 + (x_1 + h_1 - 4)^2 + F_3^*(h_1 + x_1)$. Paras x_1 voidaan määrätä h_1 :n funktiona $= x_1^*(h_1)$. Kokeilemalla x_1 :n kolmea mahdollista arvoa ja käyttämällä edellistä taulukkoa saadaan seuraava taulukko:

h_1	$x_1^*(h_1)$	$F_2^*(h_1)$
-1	1	18
0	1	10
1	1	6
2	1	4
3	0	3
4	-1	4
5	-1	6

Taulukosta käy ilmi paras x_1^* h_1 :n funktiona $= x_1^*(h_1)$ ja koko loppupään optimikustannus $F_2^*(h_1)$.

Otetaan taas askel taaksepäin, jolloin tullaan ensimmäiselle jaksolle. Nyt tunnemme tilamuuttujan ensimmäisen jakson alussa: $h_0 = 2$.

Jos ensimmäisen jakson alussa tehdään päätös x_0 , on $h_1 = h_0 + x_0 = 2 + x_0$. Jakson kustannus on $F_1 = x_0^2 + (h_1 - 2)^2 = x_0^2 + (2 + x_0 - 2)^2 = 2x_0^2$. Päätöksellä x_0 on loppupään optimikustannus $F_2(h_1) = F_2(2 + x_0)$. Meillä on kolme mahdollisuutta valita x_0 . Seuraavassa taulukossa on ko. mahdollisuuksiin liittyvät ensimmäisen jakson kustannukset, loppupään optimikustannukset ja koko tehtävän kustannus, joka on edellisten summa

x_0	$F_1 = 2x_0^2$	$F_2^*(2 + x_0)$	F
-1	2	6	8
0	0	4	4
1	2	3	5

Tehtävän ratkaisu kuuluu siis:

paras $x_0 = 0$, tällöin $h_1 = 2$:

paras $x_1^*(2) = 1$, tällöin $h_2 = 3$:

paras $x_2^*(3) = -1$

Optimikustannus on $F^* = 4$.

Dynaamista optimointia voidaan vesitekniikan puolella käyttää useiden tehtävien ratkaisuun. Esimerkkinä käyvät investointien ajoitus, jätevesien käsittelystandardien optimointi ja vesistön säännöstely.

Formuloidaan lopuksi seuraava ongelma:

Tehtävänä on hakea juoksutusohje (kuukauden jaksot) altaalle, jonka vettä käytetään kasteluun, yhdyskunnan raakavetenä ja sähköenergian tuottamiseen. Tulovirtaaman arvoa kuukauden i aikana merkitään Q_i .

Päätösmuuttuja merkitään vektorilla $\bar{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$, missä $i = 1, 2, \dots, 12$ tarkoittaa kuukautta, x_{i1} juoksutusta kasteluun, x_{i2} vedenhankintaan ja x_{i3} voimalaitokselle.

Tilamuuttujia on yksi: altaan pinnan korkeus i :n kuukauden lopussa h_i .

Kohdefunktio on summa kunkin kuukauden omasta kohdefunktiosta:

$$F = \sum_{i=1}^{12} F_i(\bar{x}_{i-0}, h_1)$$

Tilaa rajoittavat alin sallittu pinnan korkeus h'' ja ylin sallittu h' . Juoksutuksilla on rajoitukset

$$0 \leq x_{i1} \leq x_{i1}^?$$

$$0 \leq x_{i2} \leq x_{i2}^?$$

$$0 \leq x_{i3} \leq x_{i3}^?$$

Altaan pinta-ala on A ja pinnan korkeus ensimmäisen kuukauden alussa on h_0 .

Altaan kuukausittaisen juoksutusohjelman optimointi voidaan lausua dynaamisen optimoinnin tehtävänä seuraavasti:

$$\text{maksimoi } F = \sum_{i=1}^{12} F_i(\bar{x}_{i-j}, h_i)$$

$$\begin{aligned} \text{rajoituksin } \bar{x}_{i-j} &\in [0, x_{ij}^?] \\ h_i &\in [h_i'', h_i'] \end{aligned} \quad i = 1, \dots, 12$$

h_0 tunnetaan ja

$$h_{i+1} = h_i + \frac{1}{A} (Q_i - x_{i1} - x_{i2} - x_{i3}), \quad i = 1, \dots, 11$$

Näin formuloitu tehtävä voidaan ratkaista edellä esitettyä ratkaisutapaa (eli algoritmia) käyttäen.

8. EDULLISUUSVERTAILU MONITAVOITTEISESSA SUUNNITTELUSSA

8.1 Edullisuusvertailun luonne

Monitavoitteisen suunnitelman edullisuusvertailun suorittamiseksi ei ole olemassa mitään ainoaa oikeaa tekniikkaa, vaan käytettävä menetelmä riippuu suunnittelutehtävästä ja edullisuusvertailuprosessiin osallistuvien käsityksistä. Edullisuusvertailun perusteella saatua ratkaisua ei voida pitää optimiratkaisuna sanan tavanomaisessa mielessä, vaan saatu tulos on lähinnä eri näkökantojen paras kompromissi. Seuraavassa käsitellään lyhyesti eräitä mahdollisia menettelytapoja, joilla tämä kompromissi on löydettävissä.

8.2 Perustaulukkovalinta

Perustaulukkoa käytettäessä on tilanne sellainen, että suunnitelma- vaihtojen arvioimiseksi on määritettävissä kriteerit, mutta kriteereitä ei kyetä painottamaan eikä edes asettamaan tärkeysjärjestykseen. Suunnitelmavaihtoehtojilla ei myöskään pystytä johtamaan kriteerikohtaisia hyvyyslukuja muutoin kuin mittaamalla saadut mittaluvut, joista tiedetään niiden toivottu suunta.

Kukin vaihtoehto mitataan kutakin kriteeriä vastaavalla mitalla ja mittaluvuista muodostetaan taulukko, jonka vaakarivit edustavat suunnitelmavaihtoehtoja ja pystyrivit valintakriteereitä vastaavia mittalukuja. Tämän jälkeen taulukosta valitaan jokin vaihtoehto, joka on yleensä kaikkien ominaisuuksien puolesta saanut hyviä mittalukuja. Sen jälkeen poistetaan taulukosta ne vaihtoehdot, joiden kaikki mittaluvut ovat huonommat kuin valitun vertailuvaihtoehdon vastaavat arvot. Seuraavaksi kehitetään uusia vaihtoehtoja, tuodaan ne taulukkoon ja jatketaan karsintaa edellä kuvatulla tavalla, kunnes mitään vaihtoehtoa ei voida poistaa taulukosta. Lopullinen perustaulukko ja vaihtoehdot esitetään päätöksentekijälle, joka suorittaa valinnan.

Parhaiten perustaulukkovalinta soveltuu tilanteisiin, joissa kriteerit ovat samaa tärkeysluokkaa, niitä on suhteellisen vähän ja uusien vaihtoehtojen kehittäminen on suhteellisen vaivatonta.

8.3 Päättösmatriisi

Päättösmatriisi on perustaulukon kaltainen taulukko, jonka vaakarivit edustavat suunnitelmavaihtoehtoja ja pystyrivit valintakriteereinä toimivia ominaisuuksia kuvan tapaan:

Vaihtoehto	Kriteeri						Hyvyys
	1		j		m		
Paino	w_1		w_j		w_m		
1	h_{11}	H_{11}	h_{1j}	H_{1j}	h_{1m}	H_{1m}	H_1
i	h_{i1}	H_{i1}	h_{ij}	H_{ij}	h_{im}	H_{im}	H_i
n	h_{n1}	H_{n1}	h_{nj}	H_{nj}	h_{nm}	H_{nm}	H_n

Päättösmatriisi

Taulukon alkioina ovat kutakin vaihtoehto-ominaisuuskombinaatiota vastaavat hyvydet (h_{ij}) ja painotetut hyvydet (H_{ij}) sekä kunkin vaihtoehdon saama kokonaishyvyys H_i .

Eri kriteerit voivat alkujaan olla eri laatua kuten mk, km², mg/l jne. Matriisia varten vastaavat mittaluvut normeerataan sopivalle vaihteluvälille suhteelliseksi arvoiksi esim. välille 0...100.

Vaihtoehdon ko. kokonaishyvyyden (H_i) lauseke on

$$H_i = \sum_{j=1}^m W_j h_{ij}$$

jossa W_j on kriteeriominaisuudelle j annettu paino ja h_{ij} vaihtoehdon tämän ominaisuuden suhteen saama hyvyys. Painot (W_j) normeerataan yleensä siten, että niiden summa on 1.

Hyvyyslukujen johtaminen ja painoarvojen määrittäminen ovat päätösmatriisimenetelmän tärkeimmät ja vaikeimmat tehtävät. Puhtaan päätösmatriisimenetelmän lähtökohtana on oletus, että analyysissä käytetään sellaisia hyvyksien ja painojen arvoja, joista hajonnan vaikutus on poistettu. Tällöin saadut kokonaishyvydet yksikäsitteisesti ilmoittavat vaihtoehtojen keskinäisen järjestyksen.

Painojen määrittäminen on riippuvainen päätöstilanteesta. Niiden määrittäminen voi tapahtua esimerkiksi seuraavilla tavoilla:

1. Tuomarimenettelyllä, jossa asiantuntijat ja käyttäjät yhdessä sopivat painoista kokemuksensa ja käytössään olevien tietojen perusteella.
2. Simuloimalla, jossa laaditaan satunnaisesimerkkejä todellisuutta kuvaavien mallien avulla ja tehdään niistä päätelmiä.

Milloin painoarvojen määrittämisessä on tapahtunut hajontaa, voidaan tästä valintaan syntyvä epävarmuutta eliminoida ns. fraktiilimenetelmällä, jonka periaate on seuraava.

Laskennan helpottamiseksi tehdään olettaus, että eri ominaisuuksien saamat painoluvut ovat jakautuneet normaalisesti ja riippumattomasti. Kullekin vaihtoehdolle lasketaan korjattu hyvyys (H_{ki}) (ns. fraktiilikriteeri) vähentämällä keskimääräisestä hyvyydestä varmuuskertoimen ja painojen hajontaa luonnehtivan tekijän tulo.

$$H_{ki} = \bar{H}_i - t S_i = \sum_{j=1}^m \bar{W}_j h_{ij} - t \left(\sum_{j=1}^m S_{wj}^2 h_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

jossa $\bar{W}_j$ = ominaisuudelle j annettujen painojen keskiarvo

S_{wj} = em. keskiarvojen keskihajonta

h_{ij} = vaihtoehdon i ominaisuuden j suhteen saama hyvyys ja

t = varmuustasoa vastaava kerroin. Normaalisen jakautuman ollessa kyseessä kerroin t on seuraava: 50 % varmuustaso : t = 0, 60 % varmuustaso : t = 0,25, 70 % : t = 0,52, 80 % : t = 0,84, 90 % : t = 1,28, 95 % : t = 1,64, 97,5 % : t = 1,96.

Valinta suoritetaan korjatun hyvyysluvun (fraktiilikriteerin) avulla käyttäen ennalta asetettua varmuustasoa. Varmuusperiaate kuvaa sitä, kuinka päätöksentekijä suhtautuu riskiin.

Päätösmatriisimenetelmän soveltamisen ehtoina voidaan pitää seuraavia:

- kriteeriominaisuuksia on suhteellisen vähän
- kriteeriominaisuuksien tulee olla toisistaan riippumattomia
- mittaustulokset on voitava muuntaa hyvyysluvuiksi, joista epävarmuus on poistettu
- kriteerien painotus tunnetaan varmasti

Kaksi viimeksimainittua vaatimusta ovat ympäristövaikutuksia arvioitaessa tuskin täytettävissä. Tämä ei kuitenkaan poista sitä mahdollisuutta, etteikö päätösmatriisia voitaisi käyttää vaihtoehtojen vertailussa hyväksi yhtenä päätöksentekoon vaikuttavana tekijänä.

8.4 Relevanssipuu

Edellä kuvatun päätösmatriisivalintaa voidaan pitää relevanssipuumenetelmän yksitasosovellutuksena. Yleisessä muodossa ko. analyysi muodostuu seuraavasti:

Asetetut tavoitteet, joiden suunnitelmavaihtoehdolla saavutettavaa toteutumisasastetta ei pystytä mittaamaan, jaetaan osatavoitteisiin, nämä edelleen osatavoitteisiin jne, kunnes saavutaan tasolle, jossa osatavoitteiden saavuttaminen on mitattavissa tai arvioitavissa. Graafisesti esitettynä syntyy tällöin kuvio, jolla on haaroittuvan puun muoto. Tällaisessa, ns. relevanssipuussa, kunkin tason osatavoitteet ovat samalla keinoja ylemmän tason tavoitteiden saavuttamiseksi (tavoite-keino - hierarkia).

Suunnitelmavaihtoehdon kokonaisarvostelu saadaan seuraavasti:

Alimman tason osatavoitteiden saavuttamisasteen mittaamisen jälkeen osatavoitteet yhdistetään ylemmän tason tavoitteiksi painottamalla osatavoitteita niiden tärkeyden mukaan. Näin jatketaan, kunnes päästään ylimmälle tasolle ja saadaan arvo vaihtoehdon hyvyydelle asetetun päätavoitteen suhteen. Kun päätavoitteet vielä niitä painottamalla yhdistetään, saadaan selville vaihtoehdon kokonaishyvyys.

Menettelyn vaikeutena ovat luonnollisesti jako osatavoitteisiin, alimman tavoitetason mittaaminen ja osatavoitteiden painottaminen. Esiintyviä ongelmia voidaan ratkaista mm. käyttämällä ns. delfitekniikkaa, joka luonnollisesti soveltuu myös muiden painotusmenetelmien yhteydessä käytettäväksi. Delfitekniikalla tarkoitetaan menettelyä, jolla pyritään saamaan esille tietyn ryhmän (asiantuntijoita, luottamusmiehiä jne) mielipide jostakin asiasta. Tällöin järjestetään esimerkiksi kirjallinen paneeli, jossa mielipiteet kartoitetaan ja saatetaan osallistujien tietoon. Tämän jälkeen nämä voivat muuttaa mielipidettään saamansa lisäinformaation perusteella. Menettelyä toistetaan siksi kauan, että mielipiteet ovat vakiintuneet.

8.5 Hyvyys- nettokustannusanalyysi

Hyvyys- nettokustannusanalyysiä voidaan pitää päätösmatriisimenetelmän muunnoksena. Menetelmässä suunnitelmakriteerinä ovat rahassa arvioimattomat tekijät kuten vesialueiden tila, ekologisuus, riskitömyys, rahoitettavuus jne. Suunnitelmavaihtoehtoilta saadaan näiden kriteereiden suhteen hyvyysarvot joko mittalukujen avulla tai subjektiivisesti arvioiden. Hyvyysarvoja verrataan ns. nettokustannuksiin, jotka saadaan vähentämällä kustannuksista rahassa arvioitavat hyödyt. Tämä voidaan tehdä seuraavasti. Kriteereitä painotetaan niiden tärkeyden mukaan ja lasketaan painotetut hyvyysarvot yhteen. Vaihtoehdon kokonaishyvyttä voidaan arvioida jakamalla vaihtoehdon hyvyysarvojen painotettu summa nettokustannuksilla. Menetelmää on käytetty Kymijoen vesistön alaosan vesien käytön kokonaissuunnittelussa vuonna 1972.

8.6 Minimaxi-valinta

Lähtökohtana on olettamus, että suunnitelmavaihtoehtojen arvioimiselle kyetään määrittelemään tärkeimmät kriteeriominaisuudet. Kriteereitä ei kyetä painottamaan, mutta tärkein kriteeri voidaan nimetä: Kutakin kriteeriä vastaava hyvyysluku johdetaan mittaluvuista tai se arvioidaan harkintaa käyttäen.

Muodostettavasta taulukosta kunkin vaihtoehdon kohdalta otetaan sen pienin hyvyysluku, tärkeimmän kriteerin hyvyysluku ja lasketaan em. lukujen keskiarvo. Näiden kolmen luvun perusteella voidaan kussakin tapauksessa suositella päätöstentekijälle tiettyä vaihtoehtoa. Minimikriteeriä voidaan käyttää yksinään tilanteessa, jossa joidenkin hyvien ominaisuuksien ei voida lainkaan ajatella korvaavan jotain huonoa ominaisuutta.

Tärkeintä kriteeriä voidaan käyttää yksinään silloin, kun sen on merkitykseltään muita ratkaisevasti tärkeämpi ja minimikriteerit ylittävät tietyn vaatimustason eivätkä parantuessaan sanottavasti lisää hyötyä.

Keskiarvokriteeri on sopiva silloin, kun sekä minimi- että tärkein kriteeri ovat tyypiltään sellaisia, että ne lisäävät kasvaessaan hyötyä liukuvasti.

Mini-maxi-valinnan soveltamiselle voidaan asettaa seuraavat ehdot:

- kriteereitä on melko vähän
- kriteerit ovat samaa tärkeysluokkaa
- tärkein kriteeri on voitava määritellä
- mittaustulos on voitava ilmaista hyvyyslukuna jokaisen kriteeriominaisuuden osalta.

KÄYTETYT LÄHTEET

- Alexander, G.N. 1962. The use of gamma distribution in estimating regulated output from storages. Civ. Eng. Transactions, the Inst. of Engineers, CE 4.
- Barnes, F.B. 1954. Storage required for a city water supply. Journal of the Inst. of Eng. 26.
- Beard, L.R. 1962. Hydrologic data management. U.S. Corps of Engineers.
- Brittan, M.R. 1961. Probability analysis to the development of a synthetic hydrology for the Colorado River. University of Colorado.
- Chow, V.T. 1964. Handbook of applied hydrology.
- Gould, B.W. 1961. Statistical methods for estimating the design capacity of dams. J. of the Inst. of Eng. 33.
- Gould, B.W. 1964. Statistical Methods for Reservoir Yield Estimation. Water Research. Report No 8.
- Harms, A.G. & Campbell, T.H. 1967. An extension to the Thomas-Fiering model for the sequential generation of streamflow. Water Resources Research 3.
- Hazen, A. 1914. Storage to be provided in impounding reservoirs for municipal water supply. Transactions, ASCE, 77.
- Heikkilä, M., Tuononen, E. & Vakkilainen, P. Matemaattisen optimoinnin perusteet vesivarojen suunnittelussa. TKK:n vesitekniikan laitoksen julkaisu no 5.
- Hufschmidt, M.M. & Fiering, M.B. 1967. Simulation Techniques for the Design of Water Resources Systems. Mcmillan.

Hurst, H.E. 1951. Long term storage capacity of reservoirs. Transactions, ASCE, 116.

Hurst, H.E., Black, R.P. & Simaika, Y.M. 1965. Long Term Storage. Constable.

Kaitera, P. 1949. On the melting of snow and its influence on the discharge maximum in streams and rivers in Finland. TKK:n tieteellisiä tutkimuksia no 1.

Kajosaari, E. 1968. Kuivakausista Suomen vesistöissä erityisesti vedenhankintaa ja vesiensuojelua silmälläpitäen. Hydrologisen toimiston tiedonantoja XXVII.

Klemes, A. 1973. Applications of hydrology to water resources management. WMO.

Lindh, G., de Maré, L. & Falkenmark, M. 1975. Vattenutnyttjande och systemplanering. Kompendium i teknisk vattenresurslära.

McMahon, T. & Russel, G. 1978. Reservoir Capacity and Yield. Elsevier.

Matalas, N.C. 1967. Mathematical assesment of synthetic hydrology. Water Resources Research 3.

Mass, A., Hufschmidt, M.M., Dorfman, R., Thomas, H.A., Marglin, S.A. & Fair, G.M. 1962. Design of Water Resources Systems. McMillan.

Moran, P.A.P. 1959. The Theory of Storage. Methuen.

Mustonen, S.E. 1963. Kesäsateiden aiheuttamasta valumasta. Lisensiaatin työ TKK:ssa.

Mustonen, S.E. 1971. Alivaluman vaihteluista pienillä alueilla. Vesientutkimuslaitoksen julkaisuja.

Niiniwaara, K. 1958. Alivalumien todennäköisestä vaihtelusta Suomessa. Maa- ja Vesirakentaja 3.

Niinivaara, K. 1957. Alivalumien vaihtelusta. Teknillinen Aikakauslehti 4/1957.

Niinivaara, K. 1961. Alivirtaamakausien todennäköisestä vaihtelusta Suomessa. Vesitalous 2/1961.

Renqvist, H. 1935. Minimavrinningen. Tekniska Föreningens i Finland. Förhandlingar 10/1935.

Rippl, W. 1883. Capacity of storage reservoirs for water supply. Minutes of Proc., Institution of Civil Engineers, 71.

Sudler, C.H. 1927. Storage required for regulation of stream-flow. Transactions, ASCE 61.

Thomas, H.A. & Burden, R.B. 1963. Operations Research in Water Quality Management. Harvard Water Resources Group.

United States Corps of Engineers. 1975. Hydrologic Engineering Methods for Water Resources Development. Vol. 8. Reservoir Yield.

Waitt, F.W.F. 1945. Studies of droughts in the Sydney catchment areas. J. of the Inst. Eng. 17.

Wäre, M. 1951. Om lågvattenavrinningen i Finlands vattendrag. Föredrag vid NIM i Helsingfors, Juni 1951.

Wäre, M. 1952. Käyttöveden riittävydestä. Teknillinen Aikakauslehti 5/1952.

Wäre, M. 1954. Om vattendrag och deras förorening Tekniska Föreningen i Finland Förhandlingar 7/1954.