

**VESITEKNIIKAN LAITOS
TEKNILLINEN KORKEAKOULU**

**DIVISION OF WATER ENGINEERING
HELSINKI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY**

**INFILTRAATION JA MAANKOSTEUDEN
LASKENTA DIFFERENSSI- JA
ELEMENTTIMENETELMÄLLÄ**

**TUOMO KARVONEN
PERTTI VAKKILAINEN**

**JULKAISU
REPORT**

29

OTANIEMI FINLAND 1983

Infiltraation ja maankosteuden laskenta
differenssi- ja elementtimenetelmällä

Tuomo Karvonen
Pertti Vakkilainen

Otaniemi 1983

ISBN 951-752-924-4

TKK OFFSET

SISÄLLYSLUETTELO

Johdanto

1. Maaveden virtaus
2. Numeerinen ratkaisu differenssimenetelmällä
3. Numeerinen ratkaisu elementtimenetelmällä
4. Menetelmien vertailua ja tuloksia
 - 4.1 Mallien verifiointi
 - 4.2 Aika-askeleen ja ϵ :n valinta differenssimenetelmällä
 - 4.3 Aikaderivaatan approksimointi elementtimenetelmässä
 - 4.4 Differentiaalisen vesikapasiteetin ja hydraulisen johtavuuden vaikutus pohjaveden muodostumiseen
 - 4.5 Laskentaesimerkki Otaniemen lysimetrikentältä

Yhteenveto

Kirjallisuusluettelo

JOHDANTO

Veden virtaus maan, kasvuston ja ilmakehän muodostamassa kokonaisuudessa on elollisen luonnon kannalta keskeinen tapahtuma. Tutkimusaihe on eräs hydrologian yleisimmistä ja keskeisimmistä. Siitä saatavat tulokset luovat pohjan sekä fysikaalisesti perustelluille sadanta-valuntamalleille (esim. Abbott ja Cunge, 1982; Vakkilainen ja Karvonen, 1982a ja b) että kastelu- ja kuivatustoimenpiteiden suunnittelulle. Matemaattiset mallit, jotka kuvaavat liukoisten aineiden (esim. suola, typpi, fosfori) kulkeutumista maaperässä edellyttävät, että vedellä kyllästymättömän maaperän virtauskenttä tunnetaan (esim. Pickens & al., 1979 ja 1980).

Veden vertikaalisuuntaista virtausta kuvaava Richardsin yhtälö on epälineaarinen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, jolle ei ole toistaiseksi löydetty analyyttistä ratkaisua. Käytännön ongelmissa yhtälö ratkaistaan approksimatiivisesti jollakin numeerisella menetelmällä.

Differenssimenetelmään perustuvan ratkaisun ovat esittäneet mm. Niman & Hanks (1973a ja b), Feddes & al. (1974, 1976, 1978), Belmans & al. (1981), Vakkilainen (1981 ja 1982) ja Vakkilainen ja Karvonen (1982 a ja b). Elementtimenetelmää ovat puolestaan käyttäneet mm. Feddes & al. (1976), Neuman (1973), Neuman & al. (1975a ja b), Zaradny ja Feddes (1979) ja Rasmuson (1978). Differenssimenetelmän perusteita ja sovellutuksia on esitellyt mm. Remson & al. (1971). Elementtimenetelmän perusideat on esittänyt mm. Pinder (1977).

Tässä työssä Richardsin yhtälö on ratkaistu sekä differenssi- että elementtimenetelmällä. Molemmissa menetelmissä on mahdollista käyttää täysin eksplisiittistä, täysin implisiittistä tai Crank-Nicolson approksimaatiota. Yläpuolisena reunaehtona annetaan sadannan intensiteetti, jonka mallit jakavat infiltraatioksi ja pintavalunnaksi. Alapuolisena reunaehtona annetaan joko pohjavedenpinnan korkeus tai systeemiin pohjan kautta tuleva/poistuva vesimäärä. Jälkimmäisessä tapauksessa pohjavedenpinnan korkeus lasketaan.

1. MAAVEDEN VIRTAAUS

Maassa oleva vesi liikkuu korkeammalta energiatasolta aiemmalle. Maaveden omaama energiatila muodostuu matrik-, painovoima-, osmoottisen, pneumaattisen ym. potentiaalien summana. Yleensä matrik- ja painovoimapotentiaali ovat suuruudeltaan siinä määrin omaa luokkaansa, että muut potentiaaleista voidaan jättää huomioonottamatta, jolloin tarkastelun pohjaksi jää ns. hydraulinen korkeus H :

$$H = \psi - \psi_g \quad (1)$$

jossa

H = hydraulinen korkeus (cm)

ψ = matrikpotentiaali (cm)

ψ_g = painovoimapotentiaali (cm)

Matrikpotentiaalin ja vesipitoisuuden välillä vallitsee maa-lajista riippuva yhteys, joista on esitetty esimerkkejä kuvassa 1. Yhteys ei ole todellisuudessa yksikäsitteinen, vaan maan kuivuessa (desorptio) ja kostuessa (adsorptio) saatavat vedenpidätyskäyrät eroavat. Tämän ns. hysteresis-ilmiön huomioonottaminen on mahdollista (esim. Pickens ja Gillham, 1980), mutta verrattain vaikeasti toteutettavissa. Kuten kuvan 1 käyristä voidaan nähdä, on matrikpotentiaalin arvo suurin silloin, kun kosteus on maksimiarvossaan. Mitä pienemmäksi vesipitoisuus käy, sitä pienemmäksi tulee myös matrikpotentiaalin arvo. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että kun vesi virtaa korkeammasta energiatilasta matalampaan, niin kosteuserot maaprofiilissa pyrkivät tasaantumaan.

Mikäli koordinaatisto asetetaan siten, että syvyys z kasvaa maanpinnalta alaspäin, saadaan yhtälö (1) muotoon:

$$H = \psi - z \quad (2)$$

Richards (1931) osoitti, että myös kyllästymättömässä kerroksessa tapahtuva virtaus noudattaa Darcyn lakia:

$$q = K(\psi) \frac{\partial H}{\partial z} = K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \quad (3)$$

jossa

q = veden virtausnopeus (cm/d)

K = hydraulisen johtavuuden kerroin (cm/d)

Hydraulisen johtavuuden kerroin riippuu vaan vesipitoisuudesta. Se on suurimmillaan maan ollessa vedellä kyllästynyt ja pienee voimakkaasti vesipitoisuuden alentuessa. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että maan ollessa vedellä kyllästynyt, kaikki huokokset johtavat vettä. Maan kosteuspitoisuuden pienetessä vesi poistuu ensin suuremmista huukosista täyttäen edelleen pienimmät, jolloin ilman täyttämät suuremmat huokokset eivät johda vettä. Esimerkkejä K :n arvoista erityyppisissä maalajeissa on esitetty kuvassa 2.

Jotta veden virtaukselle saataisiin täydellinen matemaattinen kuvaus, sovelletaan jatkuvuusyhtälöä

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial z} - S \quad (4)$$

jossa

θ = vesipitoisuus (cm^3/cm^3)

t = aika (d)

S = systeemiin tuleva tai siitä lähtevä vesimäärä ($\text{cm}^3/\text{cm}^3/\text{d}$)

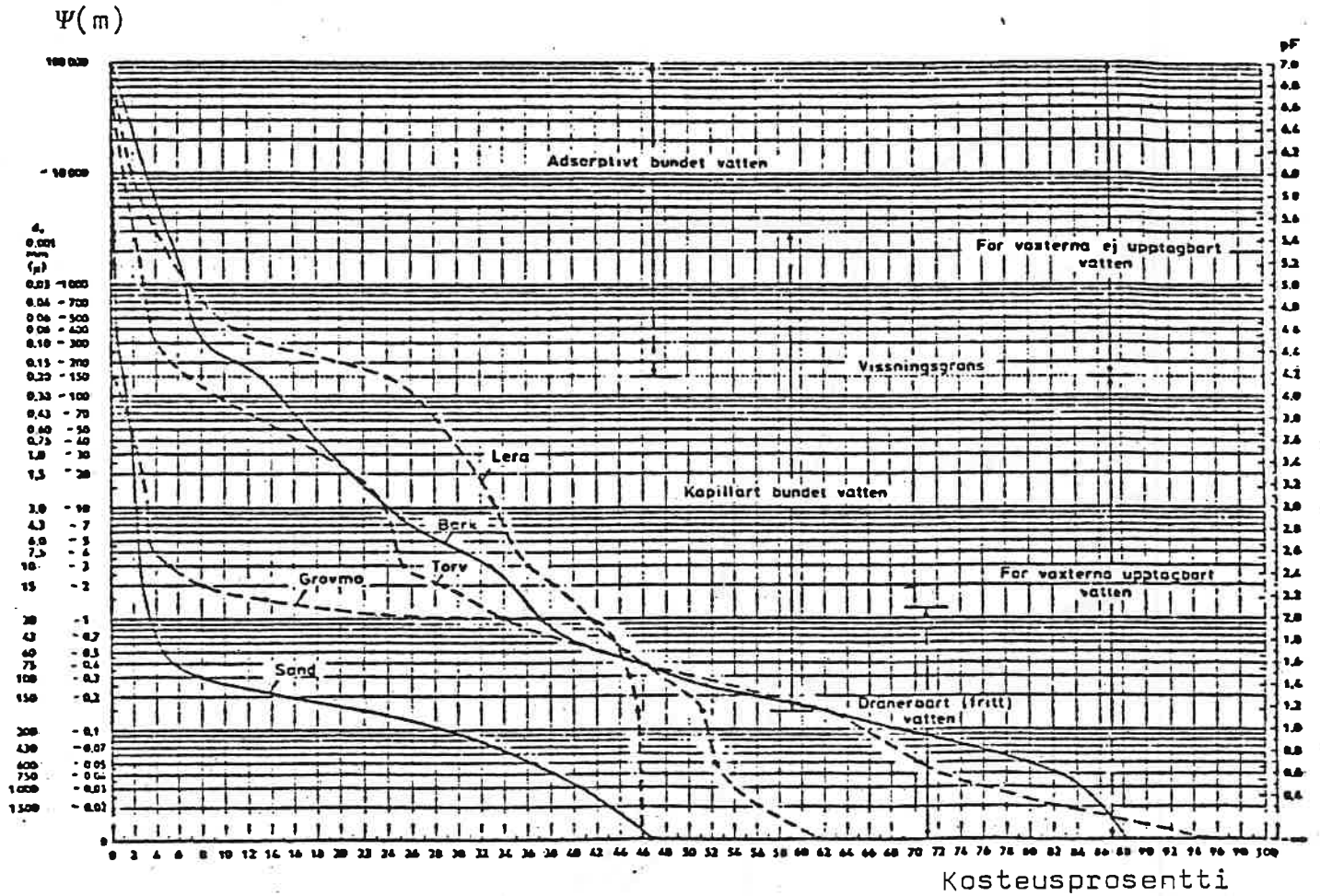
Merkitään

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d \theta}{d \psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = c(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (5)$$

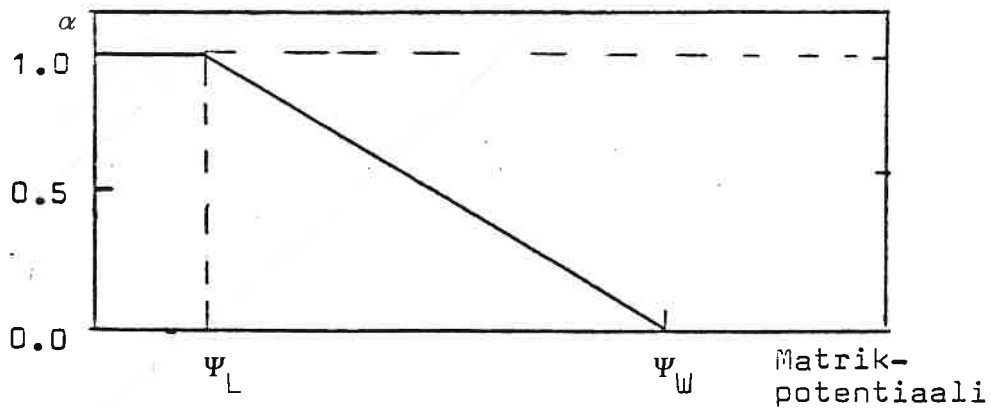
$c(\psi)$ on vedenpidätyskäyrän derivaatta ja siitä käytetään nimitystä differentiaallinen vesikapasiteetti.

Sijoittamalla yhtälö (5) jatkuvuusyhtälöön saadaan:

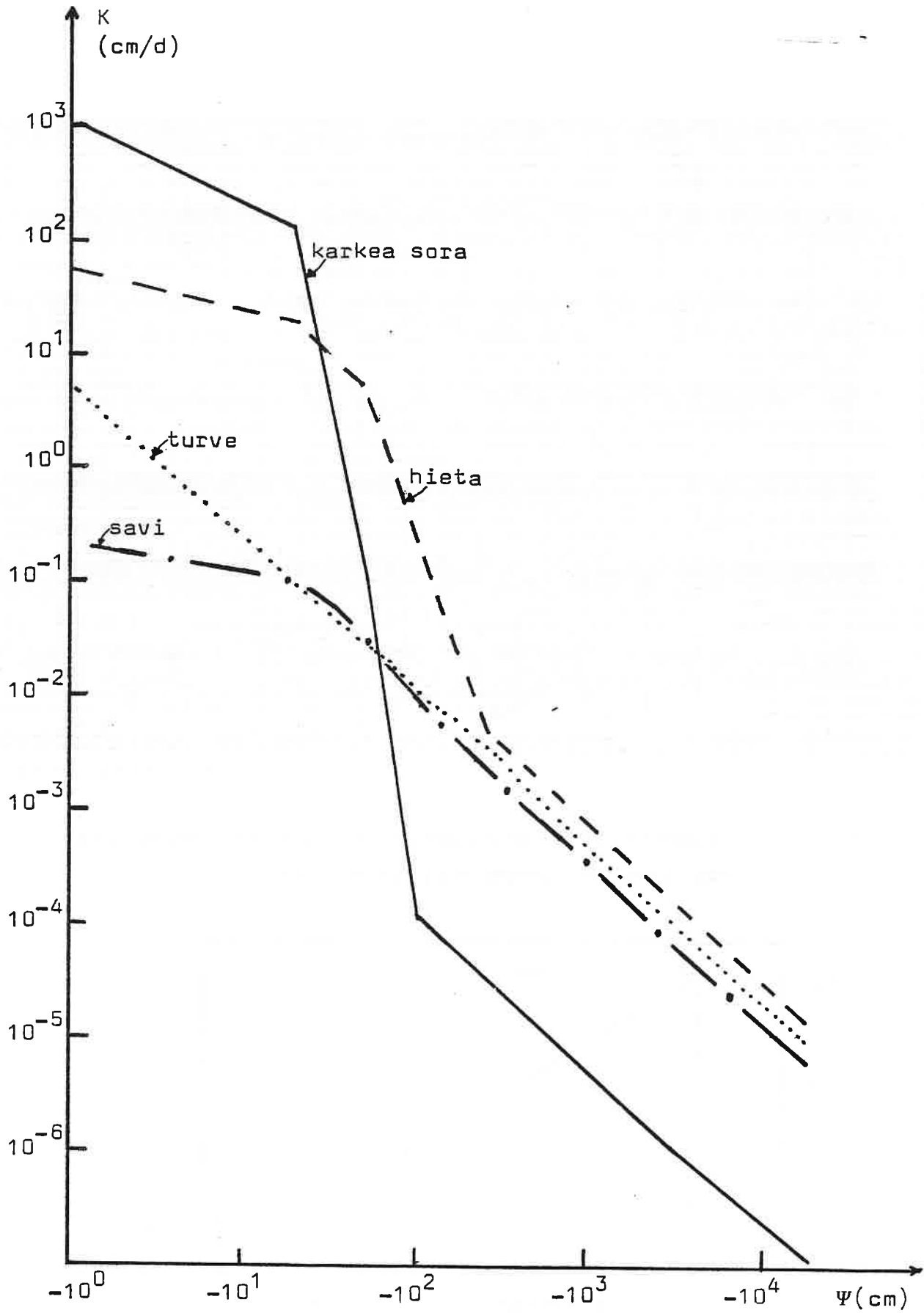
$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{c(\psi)} \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right) - \frac{S}{c(\psi)} \quad (6)$$



Kuva 1. Esimerkkejä vedenpidätyskäyristä erityyppisissä maalajeissa (Andersson ja Wiklert, 1972).



Kuva 3. Potentiaalista haihduntaa pienentävän tekijän α riippuvuus matrikpotentiaalista.



Kuva 2. Esimerkkejä hydraulisen johtavuuden ja matrikpotentiaalin välisestä riippuvuudesta eri maalajeissa (Feddes, 1979).

Kun edelleen sijoitetaan yhtälö (3) yhtälöön (6), päädytään lopulliseen yhtälöön:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{c(\psi)} \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right] - \frac{S(\psi)}{c(\psi)} \quad (7)$$

Tällöin on oletettu, että nielutermi s on matrikpotentiaalin funktio.

Alku- ja reunaehdot

Alkuehtona voidaan antaa:

- a) $\psi(z,0)$ eli matrikpotentiaalin arvot
- b) $\theta(z,0)$ eli vesipitoisuuden arvot
- c) $\psi(z,0) = z - W_{GL}$, eli profiili on tasapainotilassa hetkellä $t = 0$ (W_{GL} on pohjavedenpinnan syvyys maanpinnasta)

Reunaehtoina voidaan antaa joko tuntemattoman funktion arvot (Dirichleht - tyyppinen reunaehto) tai reunaa vastaan kohtisuora virtaus (Neuman - tyyppinen reunaehto), eli

$$\psi(z,t) = \psi_R(z,t) \quad (8)$$

$$K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) = V \quad (9)$$

Kaavoissa (8) ja (9) ψ_R ja V ovat ennalta määrättyjä z :n ja t :n funktioita.

Tämän julkaisun laskentamenetelmissä yläpuolinen reunaehto on Neuman-tyyppiä. Jos pohjavedenpinnan korkeus annetaan lähtötietona, on alapuolinen reunaehto Dirichleht-tyyppiä (pohjavedenpinnassa $\psi = 0$). Jos pohjavedenpinnan korkeus halutaan laskea, on alapuolisena reunaehtona annettava joko pohjan kautta systeemiin tuleva tai siitä poistuva vesimäärä.

Nielutermi S laskenta

Kaavan (7) termi S kuvaa kasvien vedenottoa maaperästä. Nielutermi S oletetaan tässä olevan matrikpotentiaalin funktio. S voidaan laskea kaavan (10) mukaan seuraavasti:

$$\left\{ \begin{array}{l} S(\psi) = \alpha(\psi) S_{\max} \\ \alpha(\psi) = \frac{\psi - \psi_L}{\psi_w - \psi_L} \\ S_{\max} = \frac{E_p}{z_R} \end{array} \right. \quad (10)$$

jossa

- $S_{\max}$ = suurin mahdollinen arvo S:lle
- α = potentiaalista haihduntaa pienentävä kerroin
- ψ_L = se matrikpotentiaalin arvo, josta alkaen todellinen haihdunta on potentiaalista haihduntaa pienempi (yleensä $-1000 < \psi_L < -500$ cm)
- ψ_w = se matrikpotentiaalin arvo, jolla kasvi ei enää pysty ottamaan juurillaan maasta vettä yleensä $-20\,000 < \psi_w < -15\,000$ cm)
- z_R = juuristokerroksen syvyys (yleensä voidaan olettaa, että $20 \leq z_R \leq 120$ cm)
- E_p = potentiaalinen haihdunta (cm/d)

Paljaasta maanpinnasta tapahtuvassa haihdunnassa voidaan käyttää samoja kaavoja S:n laskemiseksi. Tällöin "juuristokerroksen" syvyydeksi otetaan differenssimenetelmässä Δz ja elementtimenetelmässä ensimmäisen elementin pituus.

2. NUMEERINEN RATKAISU DIFFERENSSIMENETELMÄLLÄ

Maaveden virtausta kuvaavan epälineaarisen osittaisdifferentiaaliyhtälön (7) numeerinen ratkaisu differenssimenetelmällä perustuu siihen, että tuntemattoman funktion ψ arvo pyritään määrittämään äärellisessä määrässä pisteitä, joita kutsutaan solmupisteiksi. Tarkasteltava maaprofiili jaetaan vertikaalisuunnassa n :ään (tietokoneohjelmassa $n = \text{NODAL}$) kerrokseen, jotka ovat kaikki Δz :n paksuisia (yleensä $2 \leq \Delta z \leq 10$ cm). Sen lisäksi tarkasteltava aikaväli jaetaan Δt :n pituisiin jaksoihin. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että tarkasteltavan z - t - alueen päälle ajatellaan asetetuksi verkko, jonka solmupisteissä tuntemattoman funktion arvot määrätään. Laskenta etenee käytännössä aika-askeleen kerrallaan.

Numeerista ratkaisua varten yhtälö (7) kirjoitetaan ensin

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{c(\psi)} \frac{\partial}{\partial z} (q_{i,i+1} - q_{i-1,i}) - \frac{S(\psi)}{c(\psi)} \quad (11)$$

Termi $q_{i,i+1}$ kuvaa virtausta solmupisteiden i ja $i+1$ välillä ja termi $q_{i-1,i}$ virtausta solmupisteiden $i-1$ ja i välillä. Yhtälön (11) aikaderivaatta korvataan eteenpäin otetulla approksimaatiolla (kuva 4).

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \approx \left(\psi_i^{j+1} - \psi_i^j \right) / \Delta t \quad (12)$$

Alaindeksi i viittaa siis syvyys-suuntaiseen koordinaattiin ja j aikaan. Aikatasolla j , $j-1$, $j-2$ jne. olevat muuttujan arvot tunnetaan ja aikatasolla $j+1$ olevat muuttujat ovat tuntemattomia (edetään aika-askeleen kerrallaan). Yhtälön (11) q -termit diskretoidaan seuraavasti:

$$q_{i,i+1} \approx K(\bar{\psi}_2) \left\{ \left[\frac{\epsilon}{\Delta z} (\psi_{i+1}^{j+1} - \psi_i^{j+1}) + \frac{(1-\epsilon)}{\Delta z} (\psi_{i+1}^j - \psi_i^j) \right] - 1 \right\} \quad (13)$$

$$q_{i-1,i} \approx K(\bar{\psi}_1) \left\{ \left[\frac{\varepsilon}{\Delta z} (\psi_i^{j+1} - \psi_{i-1}^{j+1}) + \frac{(1-\varepsilon)}{\Delta z} (\psi_i^j - \psi_{i-1}^j) \right] - 1 \right\} \quad (14)$$

$$\bar{\psi}_1 = \frac{\varepsilon}{2} (\psi_i^{j+1} + \psi_{i-1}^{j+1}) + \frac{(1-\varepsilon)}{2} (\psi_i^j + \psi_{i-1}^j) \quad (15)$$

$$\bar{\psi}_2 = \frac{\varepsilon}{2} (\psi_{i+1}^{j+1} + \psi_i^{j+1}) + \frac{(1-\varepsilon)}{2} (\psi_{i+1}^j + \psi_i^j) \quad (16)$$

Kaavoissa (13) - (16) esiintyvä ε on nk. paikkaderivaatan painotuskerroin. ε :n arvo määrää minkä tyyppinen approksimaatio kulloinkin on kyseessä. Jos

- a) $\varepsilon = 0$, kyseessä on täysin eksplisiittinen ratkaisu
- b) $\varepsilon = 0.5$, kyseessä on nk. Crank-Nicolson approksimaatio
- c) $\varepsilon = 1.0$, kyseessä on täysin implisiittinen ratkaisu.

Eksplisiittinen ratkaisu on stabiili vain lyhyellä aika-askeleella, mikä rajoittaa ko. approksimaation käyttömahdollisuuksia siitä huolimatta, että se on yksinkertaisin ohjelmoida. Tarkimmillaan ratkaisu on ε :n arvolla 0.5, kun taas suurin stabiilius saavutetaan täysin implisiittisellä ratkaisulla (kts. kuva 4).

Kaavassa (11) esiintyvät C:n ja S:n arvot approksimoidaan kaavojen (17) - (19) mukaisesti:

$$C(\psi) \approx C(\bar{\psi}_t) \quad (17)$$

$$S(\psi) \approx S(\bar{\psi}_t) \quad (18)$$

$$\bar{\psi}_t = \varepsilon \psi_i^{j+1} + (1 - \varepsilon) \psi_i^j \quad (19)$$

Sijoittamalla kaavat (12) - (19) yhtälöön (11), sekä järjestelmällä termejä siten, että kaikki tuntemattomat funktion arvot siirretään vasemmalle ja tunnetut oikealle puolelle, päädytään seuraavaan yhtälöön:

$$A_i \psi_{i-1}^{j+1} + B_i \psi_i^{j+1} + C_i \psi_{i+1}^{j+1} = D_i \quad (20)$$

Kertoimet A_i , B_i , C_i ja D_i on esitetty kaavoissa (21) - (24).

$$A_i = - \frac{\Delta t \quad K(\bar{\psi}_1) \quad \epsilon}{C(\bar{\psi}_t) (\Delta z)^2} \quad (21)$$

$$C_i = \frac{\Delta t \quad K(\bar{\psi}_2) \quad \epsilon}{C(\bar{\psi}_t) (\Delta z)^2} \quad (22)$$

$$B_i = 1 - A_i - C_i \quad (23)$$

$$D_i = \psi_i^j + \frac{\Delta t}{C(\bar{\psi}_t)} \frac{1}{\Delta z} \left\{ K(\bar{\psi}_2) \left[\frac{(1-\epsilon)}{\Delta z} (\psi_{i+1}^j - \psi_i^j) - 1 \right] - K(\bar{\psi}_1) \left[\frac{(1-\epsilon)}{\Delta z} (\psi_i^j - \psi_{i-1}^j) - 1 \right] \right\} - \frac{\Delta t \quad S(\bar{\psi}_t)}{C(\bar{\psi}_t)} \quad (24)$$

Jos tuntemattomia ψ :n arvoja on kaiken kaikkiaan N kappaletta, niin kaavaa (20) soveltamalla saadaan $N-2$ yhtälöä. Tarvittavat lisäyhtälöt saadaan reunaehdoista.

Yläpuolinen reunaehto saadaan maksimoimalla infiltraatio kaavojen (25) - (28) mukaisesti:

$$q_{INF}^{MAX} = K_S \cdot \left[\frac{\bar{\psi}_S}{0.5 \Delta z} - 1 \right] \quad (25)$$

$$K_S = \sqrt{K_{SAT} \cdot K(\bar{\psi}_S)} \quad (26)$$

$$\bar{\psi}_S = \epsilon \psi_1^{j+1} + (1 - \epsilon) \psi_1^j \quad (27)$$

$$q_{INF} = \begin{cases} P & , \text{ jos } P \leq q_{INF}^{MAX} \\ q_{INF}^{MAX} & , \text{ jos } P > q_{INF}^{MAX} \end{cases} \quad (28)$$

Kaavoissa

- q_{INF}^{MAX} = maksimi infiltraatiokapasiteetti (cm/d)
 K_S = hydraulinen johtavuus maanpinnan ja solmupisteen 1 välillä (cm/d)
 ψ_1 = matrikpotentiaalin arvo solmupisteessä 1
 K_{SAT} = hydraulinen johtavuus, kun maa on vedellä kyllästynyt (cm/d)
 q_{INF} = todellinen infiltraatio (cm/d)
 P = sadanta (cm/d)

K_S :n arvo lasketaan siis geometrisena keskiarvona olettaen, että sateella maan pinnalla on hyvin ohut kerros, joka on vedellä kyllästynyt. Pintavalunta saadaan laskettua kaavasta (29):

$$q_{SUR} = \begin{cases} 0 & , \text{ jos } P \leq q_{INF}^{MAX} \\ P - q_{INF}^{MAX} & , \text{ jos } P > q_{INF}^{MAX} \end{cases} \quad (29)$$

Kaavan (20) kertoimet voidaan esittää yllimmälle solmulle muodossa:

$$A_1 = 0 \quad (30)$$

$$C_1 = \frac{\Delta t \quad K(\bar{\psi}_2) \epsilon}{C(\bar{\psi}_S) \quad (\Delta z)^2} \quad (31)$$

$$B_1 = 1 - C_1 \quad (32)$$

$$D_1 = \psi_1^{j+1} + \frac{\Delta t}{C(\bar{\psi}_S)} \frac{1}{\Delta z} \left\{ K(\bar{\psi}_2) \left[\frac{(1-\epsilon)}{\Delta z} (\psi_2^j - \psi_1^j) - 1 \right] + q_{INF} \right\} - \frac{\Delta t S(\bar{\psi}_S)}{C(\bar{\psi}_S)} \quad (33)$$

Alapuolisena reunaehtona voidaan antaa joko pohjavedenpinnan korkeus tai systeemiin pohjan kautta tuleva/poistuva vesimäärä. Maaprofiili on muuten jaettu tasapaksuisiin kerroksiin (kts. kuva 5) lukuunottamatta kahta välittömästi pohjaveden yläpuolella olevaa solmua (kuva 6). Siinä tapauksessa, että pohjavedenpinta annetaan syöttötietona, alimpaan kyllästymättömän vyöhykkeen solmuun N sijoitetaan ψ :n arvoksi tasapainotila, eli $\psi_N = -0.5 \cdot z_p$. Yhtälön (20) kertoimet voidaan siis esittää kaavojen (34) - (37) avulla.

$$A_N = 0 \quad (34)$$

$$B_N = 1 \quad (35)$$

$$C_N = 0 \quad (36)$$

$$D_N = -0.5 \cdot z_p \quad (37)$$

Kun pohjavedenpinta annetaan syöttötietona, systeemistä pohjan kautta kulkeva (tuleva/poistuva) vesimäärä q_{BOT} lasketaan kaavasta (38):

$$q_{BOT} = (w^{j+1} - w^j) / \Delta t - q_{INF} + S \quad (38)$$

jossa

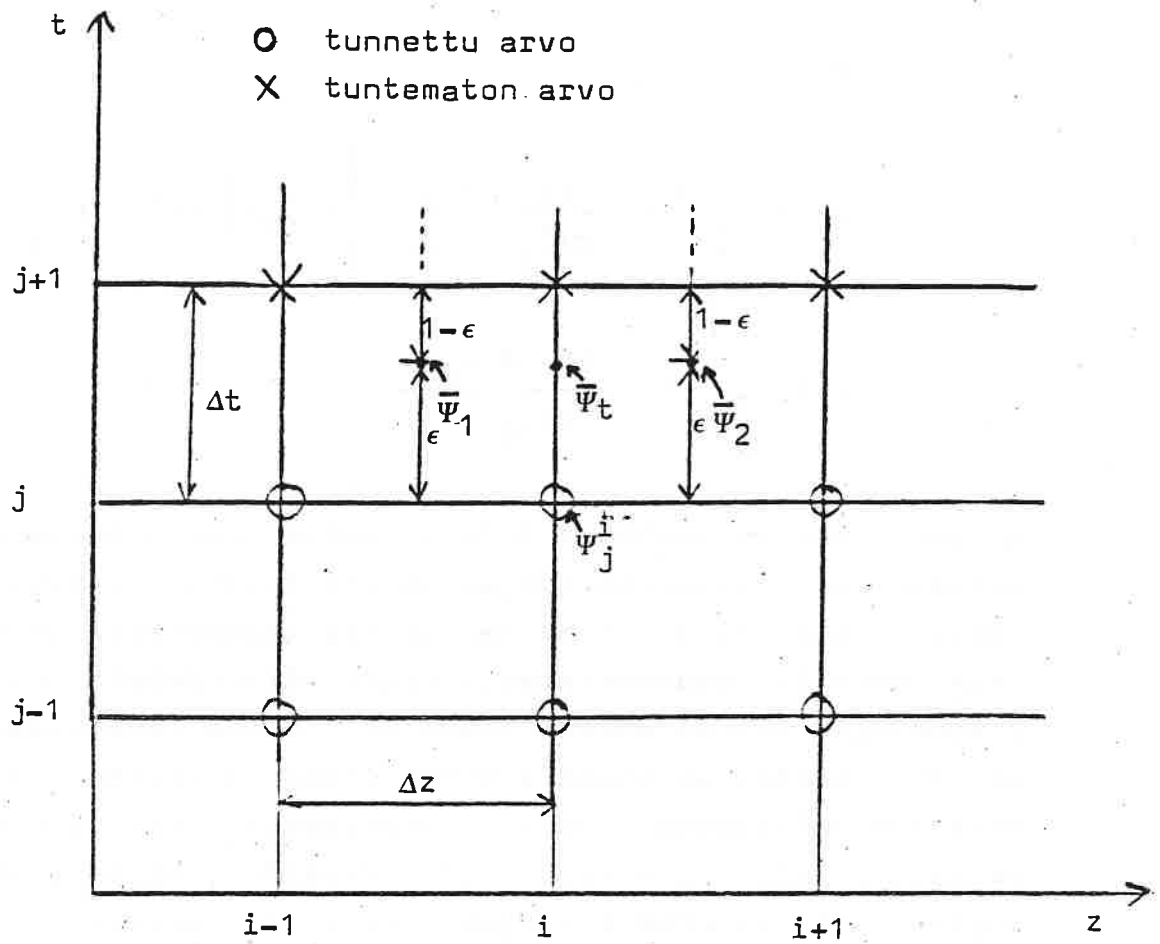
w^{j+1} = profiilin vesimäärä aika-askeleen lopussa (cm)

w^j = " " " alussa (cm)

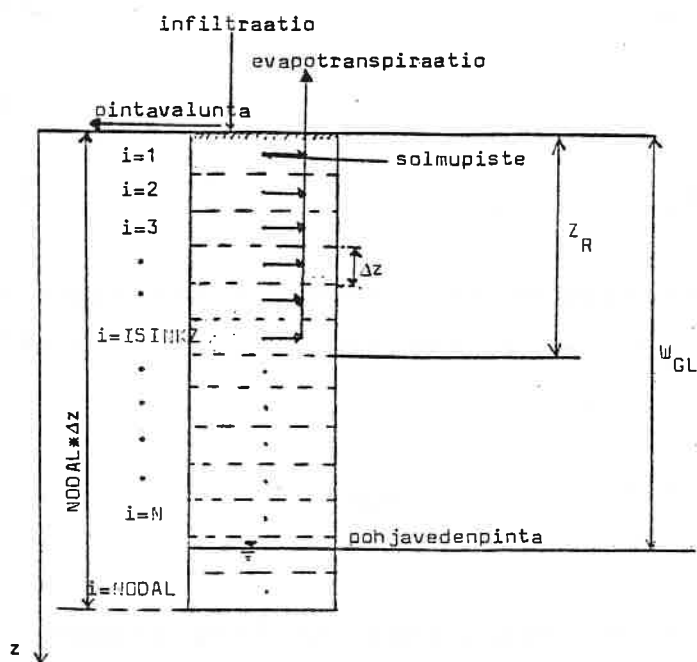
q_{INF} = infiltraatio aika-askeleen aikana (cm/d)

S = nielutermi (todellinen haihdunta) (cm/d)

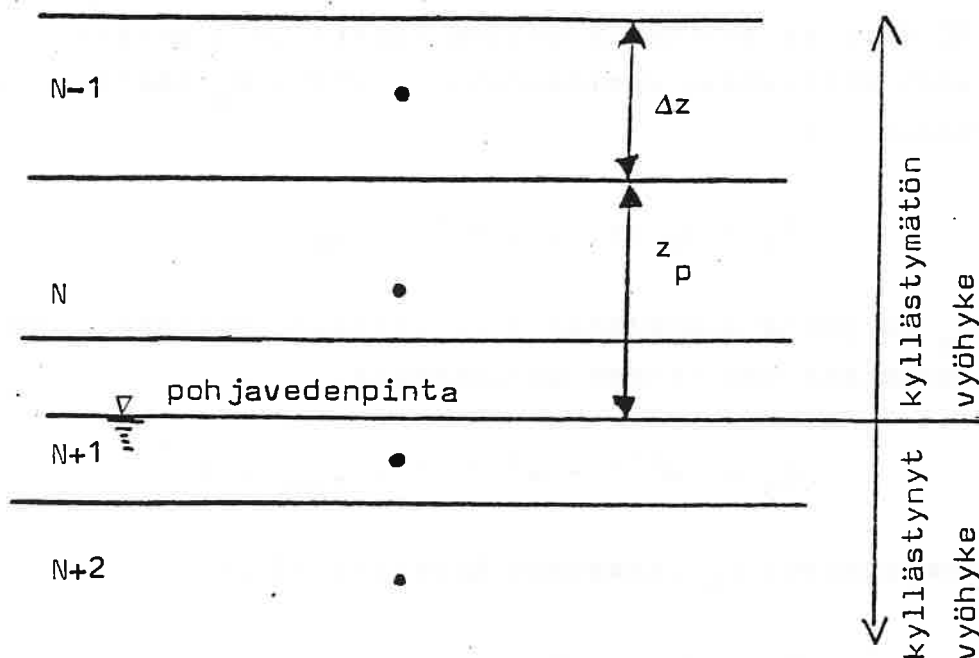
Δt = aika-askeleen pituus (d)



Kuva 4. Syvyys - ja aika-askeleen diskretointi.



Kuva 5. Maaprofiilin jakaminen kerroksiin.



Kuva 6. Pohjavedenpinnan yläpuolisen kerroksen z_p paksuuden määrittäminen.

Kun systeemin pohjan kautta kulkeva vesimäärä q_{BOT} tunnetaan (annetaan lähtötietona) pohjavedenpinnan korkeus pystytään laskemaan. Tällöin on pohjavedenpinnan yläpuolisen solmupisteen N matrikpotentiaali ($\psi:n$ arvo) myös laskettava. Kirjallisuudessa pohjavedenpinnan korkeuden laskentaperiaatteet ovat vertikaalisen maavesivirtauksen yhteydessä esittäneet aikaisemmin Belmans & al. (1981) sekä Vakkilainen ja Karvonen (1982a). Tässä monisteessa esitettävä menetelmä on itse asiassa molempien edellä mainituissa lähdeviitteissä esitettyjen menetelmien kombinaatio.

Laskentaperiaate on se, että tietyn aika-askeleen ajan pohjavedenpinta pidetään mallissa vakiona. Tästä aiheutuu aika-askeleen Δt aikana profiilin vesitaseeseen virhe E . Virhe E aiheutuu siitä, että pidämme keinotekoisesti pohjavedenpinnan korkeuden vakiona, vaikka sen pitäisi itse asiassa muuttua. Tässä oletetaan, että pohjavedenpinnan muutoksen aiheuttaa kaksi toisistaan riippumatonta tekijää:

- veden virtaus kyllästymättömästä vyöhykkeestä kyllästyneeseen vyöhykkeeseen (positiivinen tai negatiivinen)
- systeemin pohjan kautta kulkeva vesimäärä (kuva 7) (positiivinen tai negatiivinen)

Virhe E koostuu siis kahdesta komponentista E_g ja E_B (B viittaa systeemin pohjan kautta ja g pohjavedenpinnan läpi virtaavaan vesimäärään). Virhe E_g määritellään kaavalla (39):

$$E_g = q_g \Delta t \quad ; \quad E = E_g - E_B \quad (39)$$

q_g on pohjavedenpinnan läpi virtaava vesimäärä (cm/d), joka lasketaan vesitaseen perusteella.

$$q_g = (w^{j+1} - w^j) / \Delta t - q_{INF} + S \quad (40)$$

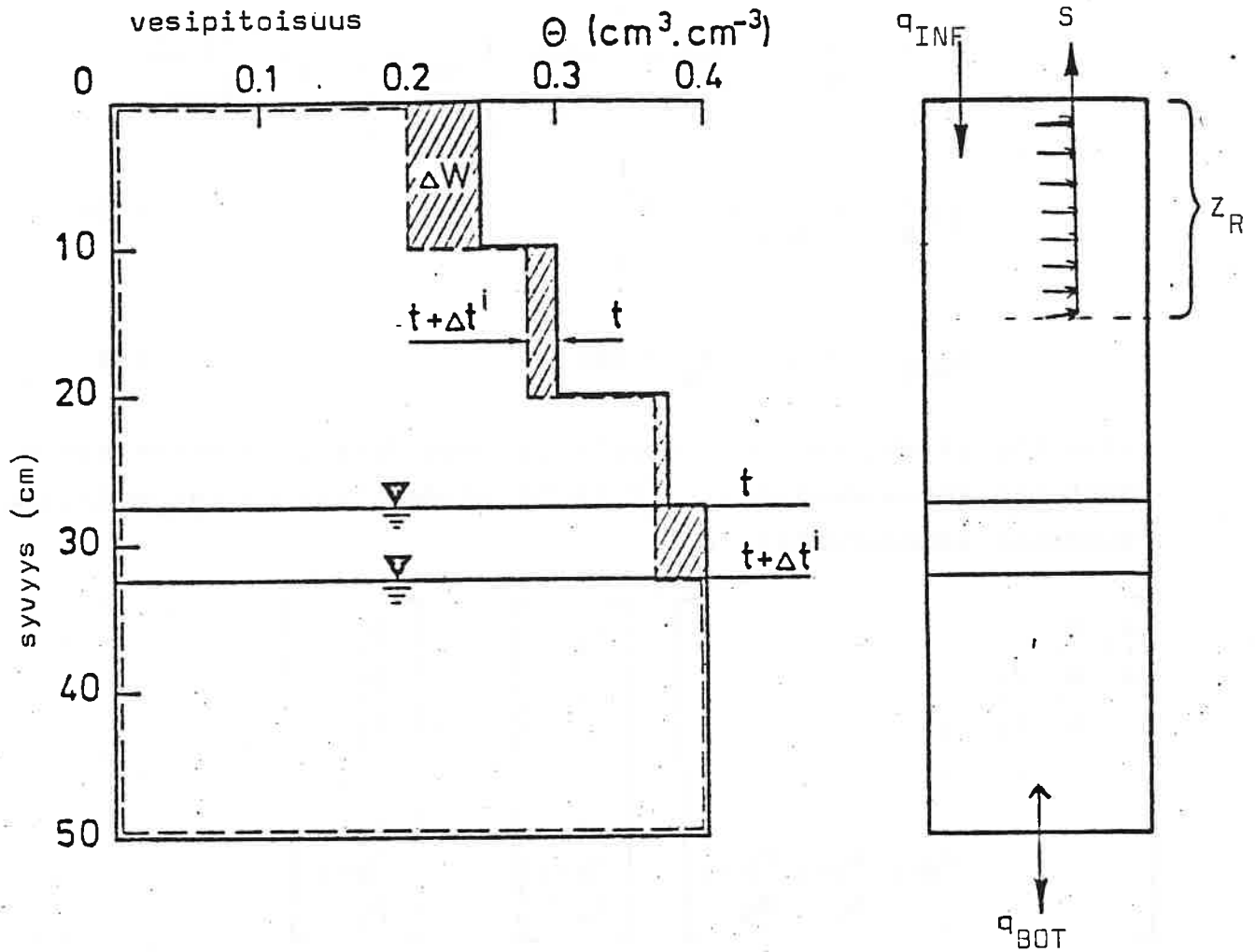
Komponentti E_B lasketaan kaavasta (41):

$$E_B = q_{BOT} \Delta t \quad (41)$$

Jos virhe E on positiivinen profiilissa on liian paljon vettä ja vesipitoisuutta w^{j+1} on laskettava E:n verran. Tämä tapahtuu laskemalla pohjavedenpinnan korkeutta. Toisaalta, jos E on negatiivinen, vesitase korjataan nostamalla pohjavedenpinnan korkeutta. Periaatteessa jokaisen aika-askeleen jälkeen voitaisiin pohjavedenpinnan korkeutta muuttaa vesitaseen korjaamiseksi. Käytännössä on parempi menetellä niin, että lasketaan kumuloituvaa virhettä E_{cum} . Jos $|E_{cum}| > E_{cum}^{max}$, niin pohjavedenpintaa lasketaan/nostetaan 0.2 cm kerrallaan, niin että kumuloituva virhe tulee tiettyä rajaa pienemmäksi, eli $|E_{cum}| \leq E_{cum}^{min}$. $E_{cum}^{min} = 0.03$ cm ja $E_{cum}^{max} = 0.04$ cm.

Pohjavedenpinnan korkeuden laskenta etenee ohjelmassa seuraavasti (esimerkkinä tilanne, jolloin systeemissä liian paljon vettä) (kts. myös kuva 7):

- a) pohjavedenpinnan korkeutta lasketaan 0.2 cm
- b) määrätään kyllästymättömän vyöhykkeen solmupisteiden määrä N, sekä lasketaan z_p :n pituus.
- c) pohjavedenpinnan yläpuolisessa maassa matrikpotentiaalin arvo pienennetään 0.2 cm 20 cm:n matkalla (esim. jos Δz on 5 cm, niin ψ :n arvo muutetaan neljässä solmupisteessä)
- d) lasketaan profiilin vesimäärän muutos ja lisätään se kumuloituvaan virheeseen, joka pienenee
- e) jos $|E_{cum}| \leq E_{cum}^{min}$, iterointi lopetetaan. Muutoin toistetaan kohtia a) - d) tarvittavan monta kertaa.



Kuva 7. Pohjavedenpinnan korkeuden laskentaperiaate.

Nyt voidaan kirjoittaa kaavan (20) mukaiset kertoimet tilanteesta, jossa pohjavedenpinnan korkeus lasketaan, kun pohjan kautta systeemiin tuleva/siitä poistuva vesimäärä q_{BOT} annetaan lähtötietona:

$$C_N = 0 \quad (42)$$

$$A_N = - \frac{\Delta t \quad K(\bar{\psi}_1) \varepsilon}{C(\bar{\psi}_1) z_p \cdot z_{BOT}} \quad (43)$$

$$B_N = 1 - A_N \quad (44)$$

$$D_N = \psi_N^i + \frac{\Delta t}{C(\bar{\psi}_1)} \frac{1}{z_p} \left\{ q_{BOT} - K(\bar{\psi}_1) \frac{(1-\epsilon)}{z_{BOT}} \cdot \left(\psi_N^j - \psi_{N-1}^j \right) - 1 \right\} \quad (45)$$

$$z_{BOT} = 0.5 \cdot (z_p + DZ) \quad (46)$$

Näin käytettävissä on N kappaletta yhtälöitä yhtä monen tuntemattoman ratkaisemiseksi. Yhtälöt voidaan kirjoittaa matriisimuodossa seuraavasti:

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & & \\ & A_3 & B_3 & C_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & A_{N-1} & B_{N-1} & C_{N-1} \\ & & & & A_N & B_N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \psi_{N-1} \\ \psi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \vdots \\ D_{N-1} \\ D_N \end{bmatrix} \quad (47)$$

Yhtälöryhmän (47) kerroinmatriisi on siis tridiagonaalinen; ratkaisu on helppo toteuttaa nk. Thomasin algoritmilla (Remson & al., 1971).

Yhtälöryhmän (47) kerroinmatriisin elementit (alkiot) sisältävät jo tuntemattomat funktion arvot aikatasolta $j+1$. Yhtälöryhmän ratkaisu ei siis ole mahdollinen ilman iterointia. Tässä käytetään eräänlaista predictor-corrector-menetelmää, jossa aikatason $j+1$ muuttujille saadaan ensimmäinen estimaatti lineaarisella ekstrapolaatiolla kahden edellisen aika-askeleen tunnettujen ψ :n arvojen avulla. Vektorimuodossa sama voidaan esittää kaavalla (48) (yläpuolella suluissa oleva luku ilmaisee monesko iteraatio on kyseessä):

$$\{ \psi \}^{j+1} = 2 \{ \psi \}^j - \{ \psi \}^{j-1} \quad (48)$$

Kaavan (48) mukaiset estimaatit sijoitetaan yhtälöryhmään (47), joka ratkaistaan. Näin saadaan uudet estimaatit tuntemattomille ψ :n arvoille. Mikäli peräkkäiset estimaatit poikkeavat toisistaan vähemmän kuin katkaisukriteerin ε_e verran, iterointi lopetetaan. Sama kaavana:

$$| \{ \psi \}^{j+1}_{(k+1)} - \{ \psi \}^{j+1}_{(k)} | \leq \varepsilon_e = 0.005 | \{ \psi \}^j | \quad (49)$$

On huomattava, että silloin, kun ε :n arvo on 0.0, predictor-corrector-menettelyä ei voi käyttää, koska aikatazon $j+1$ muuttujat eivät ole mukana yhtälön (20) vasemman puolen kertoimissa. Käytännössä ohjelma ei suorita iterointia, jos ε :n arvo on pienempi tai yhtäsuuri kuin 0.25.

3. NUMEERINEN RATKAISU ELEMENTTIMENETELMÄLLÄ

Maaveden virtausta kuvaavan osittaisdifferentiaaliyhtälön ratkaisu elementtimenetelmällä perustuu siihen, että tarkasteltava maaprofiili jaetaan osiin, joita kutsutaan elementeiksi (kuva 8). Tuntemattoman funktion arvot ratkaistaan solmupisteissä, joiden lukumäärä on siis yhtä suurempi kuin elementtien määrä. Solmupisteinä toimivat elementtien väliset rajapinnat. Elementtimenetelmässä pyritään siten ratkaisemaan tuntemattoman funktion arvo äärellisessä määrässä pisteitä: funktion arvo näiden pisteiden välisessä tarkastelualueessa lasketaan paloittain jatkuvien interpolatiopolynomien (tässä tapauksessa 1. asteen polynomi, eli lineaarinen approksimaatio) avulla.

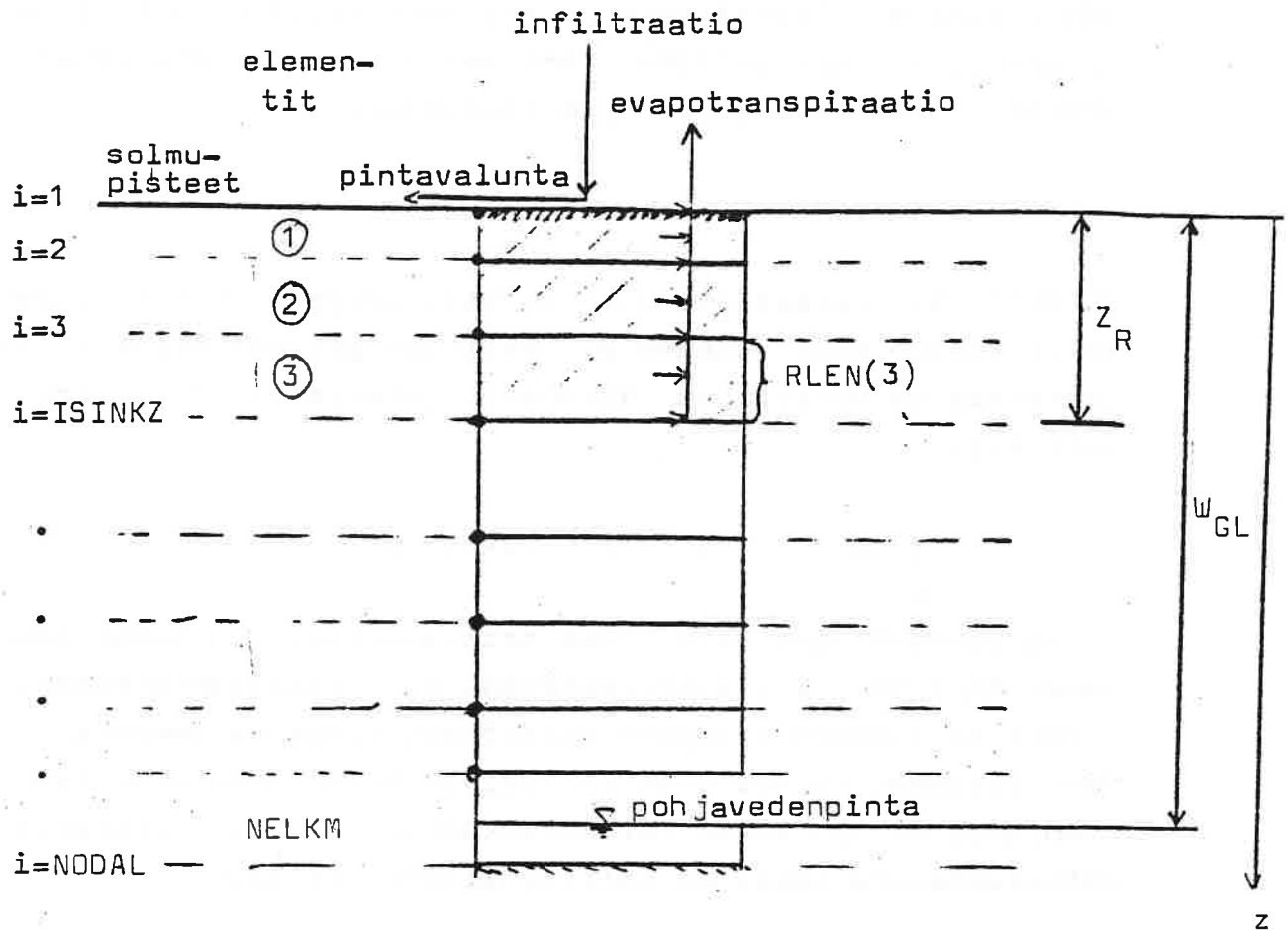
Ratkaistava osittaisdifferentiaaliyhtälö (7) kirjoitetaan differentiaalioperaattorin $L(\psi)$ avulla muotoon:

$$L(\psi) = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right] - C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} - S(\psi) = 0 \quad (50)$$

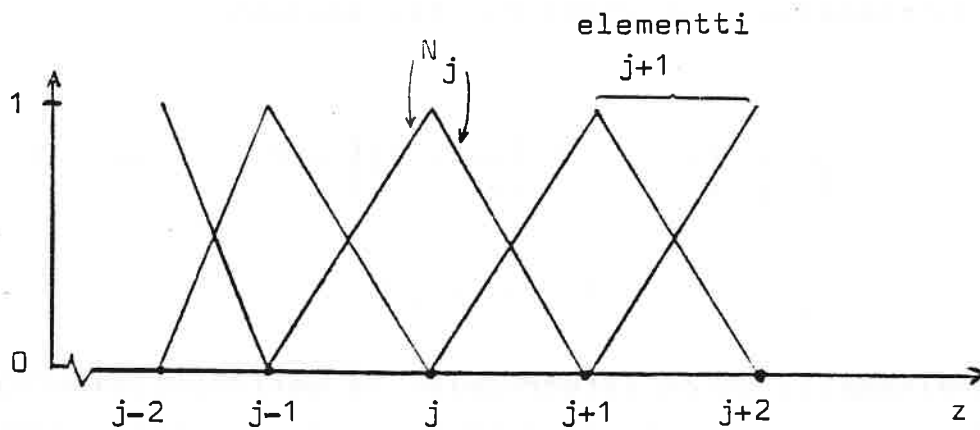
Tuntematonta funktiota approksimoidaan lineaarisessa muodossa kaavan (51) avulla seuraavasti:

$$\psi \approx \hat{\psi} = \sum_{j=1}^M \psi_j(t) N_j(z) = \psi_1 N_1 + \psi_2 N_2 + \dots \quad (51)$$

Kaavassa (51) $N_j: t, j=1, 2, \dots, M$ ovat nk. muotofunktioita (shape function), jotka saavat kukin arvon 1 oman indeksinsä ilmaiseman solmun kohdalla ja ovat nollasta eroavia vain ko. solmuun liittyvien elementtien alueella (kts. kuva 9). Oleellista on siis huomata, että kaavan (51) mukaisessa approksimaatiossa tuntemattomina ovat matrikpotentiaalin arvot kussakin solmupisteessä. Esim. funktion estimaatti solmupisteessä 2 on kaavan (51) mukaan ψ_2 , sillä tällöin $N_2 = 1$ ja muut muotofunktiot saavat arvon nolla.



Kuva 8. Maaprofiilin jakaminen elementteihin.



Kuva 9. Lineaariset muotofunktiot viivaelementeille.

Kun kaavan (51) mukainen approksimaatio sijoitetaan yhtälöön (50), tämä ei yleensä toteudu tarkasti millään muuttujien ψ arvoilla, vaan yhtälön vasen puoli saa nollasta eroavan arvon; virheen eli jäännöksen (residual) R .

$$L(\hat{\psi}) = R \quad (52)$$

Yhtälön (50) ratkaisemiseksi on siis tarpeen pystyä jollakin tavalla minimoimaan jäännös R . Valitaan painofunktiot w_i ja lasketaan painotettujen jäännösten integraali, joka merkitään nollaksi:

$$\int_{\Omega} R w_i d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (53)$$

Ω on reunaehtoien rajoittama ratkaisualue, eli tässä tapauksessa $d\Omega = dz$. Ko. ratkaisutavan, eli jäännösmenetelmän, eri versioita saadaan riippuen painofunktioiden valinnasta. Tavallisimmat keinot ovat Galerkinin keino, osa-alue keino, pienimmän neliön keino tai kollokaatio. Tässä julkaisussa ratkaisumenetelmäksi on valittu Galerkinin keino.

Galerkinin menetelmässä painofunktioiksi valitaan muotofunktiot. Painotettu jäännös voidaan esittää siis muodossa:

$$\int_{\Omega} L(\hat{\psi}) N_i d\Omega = 0 \quad i = 1 \dots M \quad (54)$$

Sijoittamalla (50) yhtälöön (54) saadaan:

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\hat{\psi}) \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} - 1 \right) \right] - C(\hat{\psi}) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} - S(\hat{\psi}) \right\} N_i dz = 0 \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (55)$$

Soveltamalla tulon integroimis- ja derivoimissääntöjä kaavan (56) muodossa ja käyttämällä ko. kaavaa yhtälön (55) hakusuluissa olevaan termiin (vastaavuudet on esitetty yhtälöissä (57)) päästään kaavaan (58):

$$\int uv' = \int uv - \int vu' \quad (56)$$

$$\begin{cases} u = N_i \\ v = K(\hat{\psi}) \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} - 1 \right) \end{cases} \quad (57)$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \left[K(\hat{\psi}) \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} - 1 \right) \right] \frac{dN_i}{dz} + S(\hat{\psi}) N_i + C(\hat{\psi}) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} N_i \right\} dz = (VN)_i \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (58)$$

V on yhtälössä (9) esitetty ratkaisualueen reunaa vastaan kohtisuora virtaus (Neuman - tyyppinen reunaehto). Sijoittamalla approksimaatio (51) kaavaan (58) saadaan:

$$\int_{\Omega} \left\{ \left[\sum_j \left(\underline{K} \psi_j \frac{dN_j}{dz} \right) - \underline{K} \right] \frac{dN_i}{dz} + \underline{S} N_i + \underline{C} N_i \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} \right\} dz = (VN)_i \quad (59)$$

Yhtälön (59) aikaderivaatat määritellään koko virtausalueen painotettuina keskiarvoina (Neuman, 1973; Neuman & al., 1975; Rasmuson, 1978; Pickens & al., 1978):

$$\int_{\Omega} \underline{C} N_i \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} dz = \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} \right)_i \int_{\Omega} \underline{C} N_i dz \quad (60)$$

Sen lisäksi kaavassa (59) esiintyvät $\underline{C}$:n, $\underline{K}$:n ja $\underline{S}$:n arvot approksimoidaan samojen muotofunktioiden avulla kuin tuntemattoman funktion arvot:

$$\underline{K} = \sum_{r=1}^N K_r N_r \quad (61)$$

$$\underline{S} = \sum_{i=1}^N S_i N_i \quad (62)$$

$$\underline{C} = \sum_{i=1}^N C_i N_i \quad (63)$$

Sijoittamalla (60) - (63) kaavaan (59) saadaan:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \left[\sum_j \left(\sum_i (K_i N_i) \psi_j \frac{dN_j}{dz} \right) - \sum_i (K_i N_i) \right] \frac{dN_i}{dz} \right. \\ \left. + \sum_i (S_i N_i) N_i + \sum_i (C_i N_i) N_i \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_i \right\} dz \\ = (VN)_i \end{aligned} \quad (64)$$

Alkuperäisessä Galerkinin keinossa muotofunktiot oli määritelty koko ratkaisualueessa. Myöhemmin havaittiin, että on yksinkertaisempaa määrittellä muotofunktiot paloittain jatkuvina ja siten, että ne ovat nolasta poikkeavia vain tietyssä osa-alueessa (elementissä). Toisin sanoen siirrytään nk. globaalista koordinaattisysteemistä lokaaliseen (paikalliseen, elementtikohtaiseen) systeemiin. Kun ollaan tietyn elementin e alueella, on approksimaatio (51) esitettävissä paljon yksinkertaisemmassa muodossa:

$$\psi^e = \sum_{j=1}^{M^e} \psi_j^e N_j^e \quad j = 1, \dots, M^e \quad (65)$$

jossa

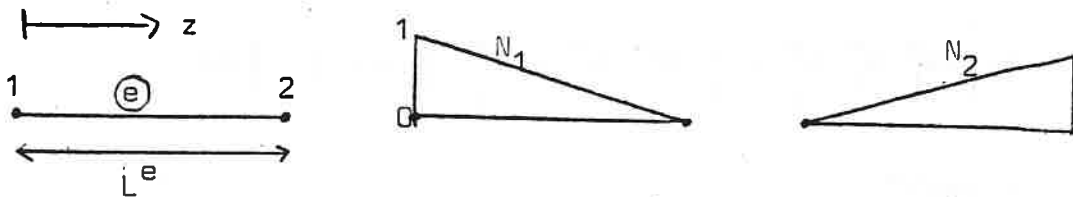
M^e = elementin solmupisteiden määrä

N_i^e = lokaalinen muotofunktio (määritelty vain elementin i e alueella)

Tässä julkaisussa tarkastellaan viivaelementtejä, jolloin kussakin elementissä on solmupisteitä 2, ja approksimaatio on muotoa:

$$\hat{\psi}^e = \sum_{j=1}^2 \psi_j^e N_j^e = \psi_{-1}^e N_{-1}^e + \psi_2^e N_2^e \quad (66)$$

Lokaalisten muotofunktioiden kuvaajat on esitetty kuvassa 10 ja niiden yhtälöt ovat (67) ja (68).



Kuva 10. Viivaelementin muotofunktioiden kuvaajat.

$$N_1 = 1 - \frac{z}{L^e} \quad (67)$$

$$N_2 = \frac{z}{L^e} \quad (68)$$

L^e on elementin pituus. Muotofunktioiden merkitystä voidaan havainnollistaa laskemalla kaavalla (66) matrikpotentiaalin arvot elementin e reunoilla ja keskipisteessä:

$$\psi^e(z=0) = \psi_1^e \cdot 1 + \psi_2^e \cdot 0 = \psi_1^e$$

$$\psi^e(z = \frac{1}{2}a) = \psi_1^e \cdot \frac{1}{2} + \psi_2^e \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\psi_1^e + \psi_2^e)$$

$$\psi^e(z=a) = \psi_1^e \cdot 0 + \psi_2^e \cdot 1 = \psi_2^e$$

Koska integroituville funktioille pätee (69)

$$\int_{\Omega} () d\Omega = \sum_{\Omega^e} \int_{\Omega^e} () d\Omega \quad (69)$$

nähdään helposti, että elementtimenetelmäprosessissa voidaan tarkastella erikseen kutakin elementtiä, ja systeemin käyttäytymistä kuvaavat yhtälöt saadaan yksinkertaisesti laskemalla yhteen eri elementtien termit.

Kaavan (64) esittämä integraali saadaan siis laskettua elementtien integraaleista. Ts. integrointi kunkin elementin alueen Ω^e yli voidaan suorittaa täysin riippumatta muista elementeistä. Kaava (64) voidaan siis muuttaa muotoon:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} \left\{ \left[\sum_j \left(K_{11}^e N_1^e \right) \psi_j \frac{dN_j^e}{dz} \right] - \sum_i \left(K_{11}^e N_1^e \right) \right. \\
 & \left. + \sum_i \left(S_{11}^e N_1^e \right) N_i^e + \sum_i \left(C_{11}^e N_1^e \right) N_i^e \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_i \right\} dz \\
 & = (VN)_i^e
 \end{aligned} \tag{70}$$

jossa

E = elementtien kokonaismäärä

Kaava (70) voidaan edelleen kirjoittaa elementtikohtaisesti muotoon (järjestelemällä termejä ja suorittamalla integroinnit):

$$[A]\{\psi\}^e + [B]^e \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\}^e = \{C\}^e + \{D\}^{e-} + \{Q\}^e \tag{71}$$

$[A]^e$ ja $[B]^e$ ovat viivaelementtien tapauksessa 2x2 matriiseja, $\{\psi\}^e$, $\left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\}^e$, $\{C\}^e$, $\{D\}^{e-}$ ja $\{Q\}^e$ 2x1 pystyvektoreita.

Kerroinmatriisi $[A]^e$:n alkiot ovat seuraavat:

$$\begin{aligned}
 [A_{ij}]^e &= \int_{\Omega^e} \left[\sum_j \left(K_{11}^e N_1^e \right) \frac{dN_j^e}{dz} \frac{dN_i^e}{dz} \right] dz \\
 &= \int_{\Omega^e} \left\{ \sum_j \left[\left(K_{11}^e N_1^e + K_{22}^e N_2^e \right) \frac{dN_j^e}{dz} \frac{dN_i^e}{dz} \right] \right\} dz \\
 &= \frac{(K_1^e + K_2^e)}{2} \frac{1}{L^e} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{72}$$

Esimerkiksi alkio A_{11}^e integroidaan seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned}
 A_{11}^e &= \int_{\Omega^e} \left[\left(K_{11}^e N_1^e + K_{22}^e N_2^e \right) \cdot \frac{dN_1^e}{dz} \frac{dN_1^e}{dz} \right] dz \\
 &= \left(-\frac{1}{L^e} \right) \left(-\frac{1}{L^e} \right) \int_{\Omega^e} \left[K_1^e \left(1 - \frac{z}{L^e} \right) + K_2^e \frac{z}{L^e} \right] dz \\
 &= \frac{1}{(L^e)^2} \int_0^{L^e} \left(K_1^e z - K_1^e \frac{z^2}{2L^e} + K_2^e \frac{z^2}{2L^e} \right) dz
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} (K_1^e + K_2^e) \frac{1}{L^e}$$

Vektori $\{\psi\}^e$ sisältää tuntemattomat matrikpotentiaalin arvot.

$$\{\psi\}^e = \begin{bmatrix} \psi_1^e \\ \psi_2^e \end{bmatrix} \quad (73)$$

Kerroinmatriisi $[B]^e$ on kaavan (60) soveltamisen ansiosta diagonaalimatriisi:

$$\begin{aligned} [B_{ij}]^e &= \int_{\Omega^e} \left(\sum_l (C_{lN_l}^e) N_l^e \right) dz \\ &= \int_{\Omega^e} (C_{11}^e N_1^e + C_{22}^e N_2^e) N_i^e dz \\ &= \int_{\Omega^e} (C_{11}^e N_1^e N_i^e + C_{22}^e N_2^e N_i^e) dz \\ &= \frac{1}{6} L^e \begin{pmatrix} 2C_1^e + C_2^e & 0 \\ 0 & C_1^e + 2C_2^e \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (74)$$

Esimerkiksi alkio B_{11}^e saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} B_{11}^e &= \int_{\Omega^e} (C_{11}^e N_1^e N_1^e + C_{22}^e N_2^e N_1^e) dz \\ &= \int_{\Omega} \left[C_1^e \left(1 - \frac{z}{L^e}\right) \left(1 - \frac{z}{L^e}\right) + C_2^e \frac{z}{L^e} \left(1 - \frac{z}{L^e}\right) \right] dz \\ &= \int_0^{L^e} \left[C_1^e \left(z - \frac{z^2}{L^e} + \frac{z^3}{3(L^e)^2}\right) + C_2^e \left(\frac{z^2}{2L^e} - \frac{z^3}{3(L^e)^2}\right) \right] dz \\ &= C_1^e \frac{L^e}{3} + C_2^e \frac{L^e}{6} = \frac{1}{6} L^e (2C_1^e + C_2^e) \end{aligned}$$

Vektorin $\{C\}^e$ alkiot ovat seuraavat:

$$\begin{aligned} \{C\}^e &= \int_{\Omega^e} \left[\sum_i (K_{11}^e N_i^e) \frac{dN_i^e}{dz} \right] dz \\ &= \int_{\Omega^e} \left[(K_{11}^e N_1^e \frac{dN_1^e}{dz} + K_{22}^e N_2^e \frac{dN_2^e}{dz}) \right] dz \\ &= \frac{K_{11}^e + K_{22}^e}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (75)$$

Esimerkkinä lasketaan C_1^e :

$$\begin{aligned} C_1^e &= \int_{\Omega} \left(K_{11}^e N_1^e \frac{dN_1^e}{dz} + K_{22}^e N_2^e \frac{dN_2^e}{dz} \right) dz \\ &= \int_{\Omega} \left[K_{11}^e N_1^e \left(-\frac{1}{L^e} \right) + K_{22}^e N_2^e \left(-\frac{1}{L^e} \right) \right] dz \\ &= \left(-\frac{1}{L^e} \right) \int_0^{L^e} \left[K_{11}^e \left(z - \frac{z^2}{2L^e} \right) + K_{22}^e \left(\frac{z^2}{2L^e} \right) \right] dz \\ &= - \left(\frac{K_{11}^e + K_{22}^e}{2} \right) . \end{aligned}$$

Vektorin $\{D\}^e$ alkiot on esitetty kaavassa (76):

$$\begin{aligned} \{D\}^e &= - \int_{\Omega^e} \left[\sum_i (S_{11}^e N_i^e) N_i^e \right] dz \\ &= - \int_{\Omega^e} (S_{11}^e N_1^e N_1^e + S_{12}^e N_1^e N_2^e) dz \\ &= - \frac{1}{6} L^e \begin{pmatrix} 2S_{11}^e + S_{12}^e \\ S_{11}^e + 2S_{12}^e \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (76)$$

Vektori $\{Q\}^e$ poikkeaa nollasta vain niissä solmupisteissä, joissa reunaehto on Neuman - tyyppinen (määritellään systeemiin tuleva/siitä poistuva virtaus). Käytännössä $\{Q\}^e$ voi poiketa nollasta vain ylimmässä ja alimmassa solmupisteessä (tämän monisteen tapauksessa).

Summaamalla eri elementtien integraalit päädytään lopulliseen yhtälöryhmään, joka on esitetty kaavassa (77):

$$[A]\{\psi\} + [B] \left(-\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \{C\} + \{D\} + \{Q\} \quad (77a)$$

$$[A] = \sum_{e=1}^E [A]^e \quad (77b)$$

$$[B] = \sum_{e=1}^E [B]^e \quad (77c)$$

$$\{C\} = \sum_{e=1}^E \{C\}^e \quad (77d)$$

$$\{D\} = \sum_{e=1}^E \{D\}^e \quad (77e)$$

Yhtälöryhmien (77a) matriisien dimensio on $M \times M$ ja vektorien dimensio $M \times 1$, missä M on solmupisteiden kokonaismäärä.

Aikadiskretointi tapahtuu eteenpäin otetulla approksimaatiolla:

$$\left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\} \approx \frac{\{\psi\}^{j+1} - \{\psi\}^j}{\Delta t} \quad (78)$$

Kerroinmatriisien ja tunnettujen vektorien arvot lasketaan kaavassa (77) aikavälin $(j, j+1)$ puolivälissä, eli pisteessä $j+1/2$. Sijoittamalla lisäksi (78) kaavaan (77a) päästään seuraavaan yhtälöön (ottamalla vielä mukaan nk. painotuskerroimen ϵ , jonka merkitys on täsmälleen sama kuin differenssimenetelmän yhteydessäkin):

$$[A]^{j+\frac{1}{2}} \left[\varepsilon \{\psi\}^{j+1} + (1-\varepsilon) \{\psi\}^j \right] + [B]^{j+\frac{1}{2}} \frac{(\{\psi\}^{j+1} - \{\psi\}^j)}{\Delta t} = \{C\}^{j+\frac{1}{2}} + \{D\}^{j+\frac{1}{2}} + \{Q\}^{j+\frac{1}{2}} \quad (79)$$

Yhtälö (79) voidaan edelleen ratkaista tuntemattomien suhteen, jolloin päästään lopulliseen, ratkaistavaan yhtälöön:

$$\left(\varepsilon [A]^{j+\frac{1}{2}} + \frac{[B]^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right) \{\psi\}^{j+1} = \left[\frac{[B]^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta t} - (1-\varepsilon) [A]^{j+\frac{1}{2}} \right] \{\psi\}^j + \{C\}^{j+\frac{1}{2}} + \{D\}^{j+\frac{1}{2}} + \{Q\}^{j+\frac{1}{2}} \quad (80)$$

On huomattava, että elementtimenetelmän tapauksessa kertoimella ε on differenssimenetelmästä poikkeava merkitys siinä, että kertoimet lasketaan joka tapauksessa välin puolivälin arvoilla (kaava (79)) olipa ε :n arvo mikä tahansa. Ei siis ole suositeltavaa käyttää ε :lla 0.5:stä poikkeavaa arvoa kuin erityistapauksissa (Neuman & al., 1975), jolloin on käytettävä ε :n arvoa yksi, jottei yhtälöistä tulisi elliptisiä.

Kuten differenssimenetelmässäkin, on yhtälön (80) ratkaisu etsittävä iteroimalla käyttäen ensimmäisenä approksimaationa kaavalla (48) laskettua ekstrapolaatiota. Ratkaisukriteerin arvo on niinikään sama, eli yhtälön (49) mukainen.

Sikä nielutermien S, että pohjavedenpinnan korkeuden laskentamenetelmät ovat täysin vastaavat kuin luvussa 2. Myös reunaehtojen määrittely (maksimi-infiltraatiokapasiteetti ja alapuolisen reunaehdon laatu) ovat täysin analogiset differenssimenetelmän kanssa. Nielutermien S oletetaan vaikuttavan solmupisteeseen ISINKZ saakka.

4. MENETELMIEN VERTAILUA JA TULOKSIA

4.1 Mallien verifiointi

Ennenkuin maankosteusmalleja voidaan soveltaa käytäntöön, on pystyttävä osoittamaan, että ko. osittaisdifferentiaaliyhtälön numeerinen ratkaisu approksimoi yhtälön (7) käyttäytymistä riittävän hyvin. Koska yhtälölle ei tunneta analyttistä ratkaisua, on verifiointi toteutettava muilla keinoin.

Välttämätön - mutta ei riittävä - ehto on, että kun:

- profiili on alkutilanteessa tasapainossa
 - pohjavedenpinta pysyy vakiona
 - sadanta ja potentiaalinen haihdunta on nolla,
- profiilin on laskennan ajan myös pysyttävä tasapainossa. Tämä testi paljastaa lähinnä yhtälön (20) kertoimien A_i , B_i , C_i ja D_i johtamisessa syntyneet virheet, sekä tietyt ohjelmointivirheet (em. kertoimien ohjelmointi, taulukkohaku, kerroinmatriisin ratkaiseminen).

Maankosteusmallien verifiointiajona käytettiin seuraavaa tilannetta:

- profiili on alkutilanteessa tasapainossa
- pohjavedenpinta on laskennan alkuhetkellä 60 cm:n syvyydellä (maan pinnalla matrikpotentiaalin arvo on siis - 60 cm)
- pohjavedenpinnan korkeus lasketaan olettaen, että pohjan kautta tuleva vesimäärä on koko ajan nolla
- yläpuolisena reunaehtona (kts. kuva 11) on viiden ensimmäisen vuorokauden ajan 5 mm potentiaalinen haihdunta, viiden seuraavan vuorokauden ajan 5 mm:n sadanta ja viimeiset viisi vuorokautta siten, että $E_p = P = 0$
- haihdunta pysyy koko ajan potentiaalisella tasolla, eli koko laskentajakson aikana profiilin tulee ja profiilista poistuu sama määrä vettä

Ehdot sille, että mallit laskevat oikein ovat seuraavat:

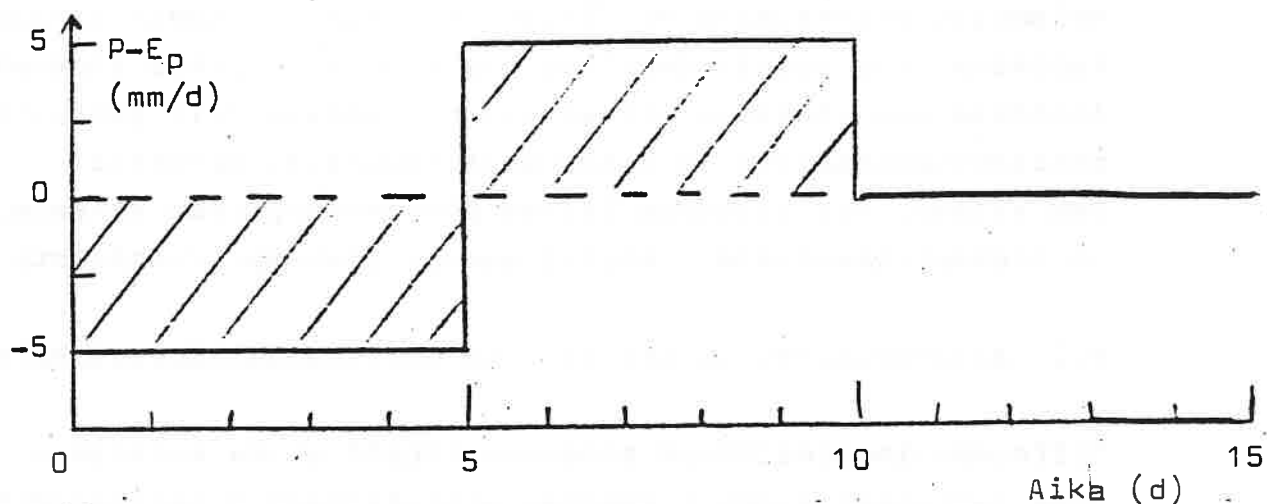
- profiilin on oltava tasapainossa laskentajakson lopussa, koska systeemiin tuleva ja siitä poistuva vesimäärä ovat yhtäsuuret

- profiilin vesimäärä alkutilanteessa = vesimäärä lopputilanteessa - pohjavedenpinnan laskennassa sallittava virhe (korkeintaan 0.04 cm, kts. luku 2, pohjavedenpinnan laskenta ja termi E_{cum})
- pohjavedenpinta laskentajakson lopussa oltava lähes sama kuin alkutilanteessa, eli 60 cm maanpinnasta (tarkalleen samaan korkeuteen ei voida päästä johtuen edellä mainitusta laskennassa sallittavasta maksimivirheestä E_{cum}^{max})

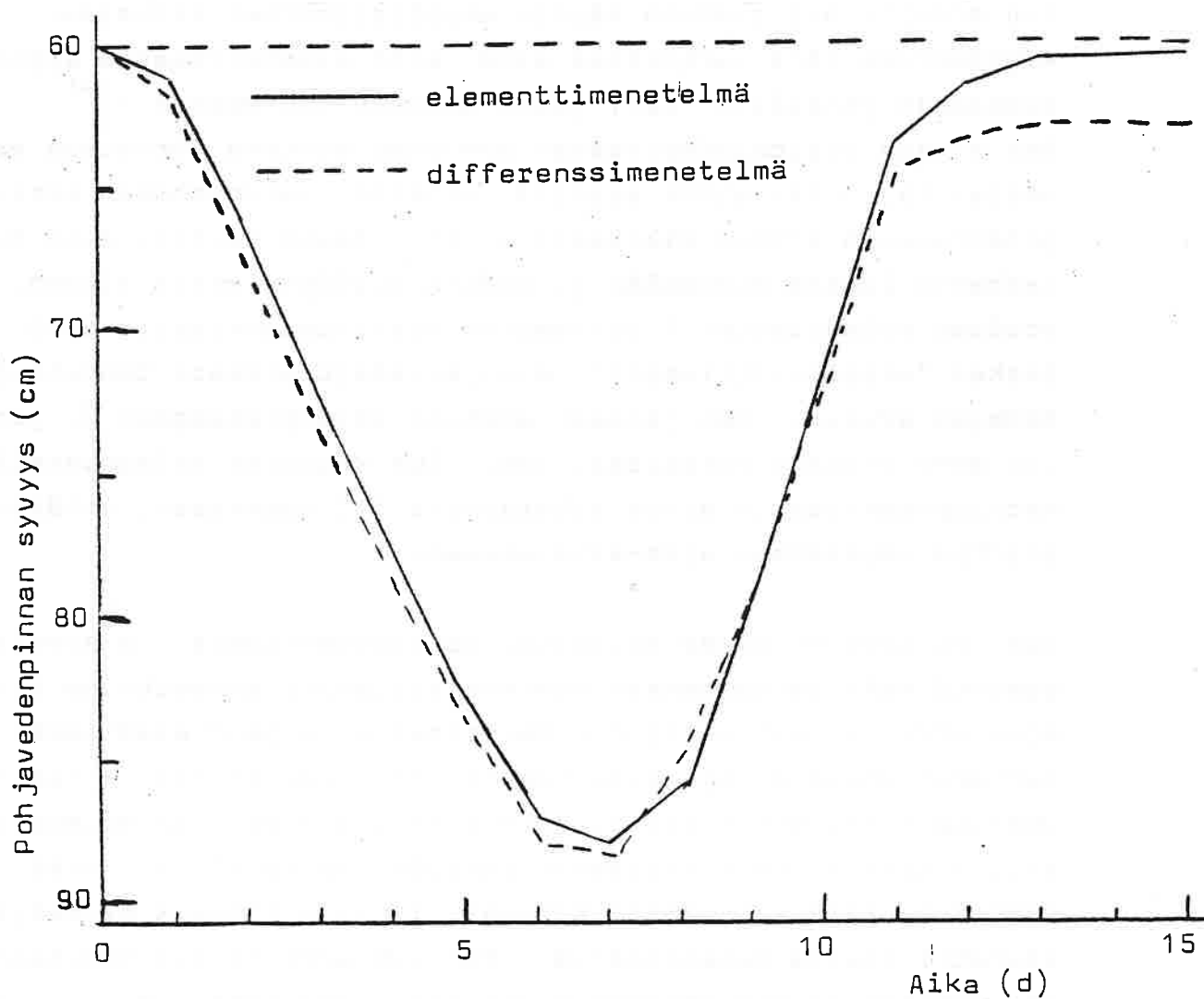
Laskennassa käytetyt vedenpidätyskäyrät ja hydrauliset johtavuuden ovat samat kuin mitä Vakkilainen (1981) on käyttänyt.

Kuvassa 12 on esitetty differenssi- ja elementtimenetelmillä lasketut pohjavedenpinnan korkeudet. Elementtimenetelmällä pohjavedenpinta asettuu korkeuteen 60.6 cm ja differenssinenetelmällä korkeuteen 62.9 cm. Elementtimenetelmällä saavutettava parempi tulos perustuu siihen helppouteen, jolla alapuolinen reunaehto voidaan käsitellä. Molemmilla menetelmillä saavutetaan tasapainotila profiilissa. Maan pinnalla matrikpotentiaali on elementtimenetelmällä laskettuna -60.6 cm ja differenssinenetelmällä -60.5 cm. Kosteusprofiiliin jäävä virhe differenssinenetelmässä on -0.026 cm ja elementtimenetelmässä -0.036 cm. Vaikka differenssinenetelmässä kumuloituva virhe on pienempi, on pohjavedenpinta 2.9 cm syvemmällä kuin oikea arvo johtuen pohjavedenpinnan yläpuolisen solmupisteen käsittelyssä aiheutuvista epätarkkuuksista.

Jos elementtimenetelmässä profiiliin jäävä virhe tasoitetaan matrikpotentiaalin arvoiksi, nousee koko tasapainotilassa olevan profiilin ψ 0.6 cm, jolloin maanpinnan matrikpotentiaalin arvoksi tulisi -60.0 cm ja pohjavedenpinta nousisi vastaavasti 0.6 cm, eli tarkalleen samaan kuin alkutilanteessakin. Elementtimenetelmä antaa tässä nimenomaisessa tapauksessa siis täysin tarkan tuloksen. Differenssinenetelmässä profiiliin jäävän kosteusvirheen huomioiminen nostaa pohjavedenpinnan korkeuteen 62.5 cm, eli differenssinenetelmällä ei päästä yhtä suureen tarkkuuteen kuin elementtimenetelmällä. Merkittävää on, että esim. viiden vuorokauden jälkeen profiilin matrikpotentiaalin arvot ovat samat lukuunottamatta kahta välittömästi pohjavedenpinnan yläpuolella olevaa solmupistettä.



Kuva 11. Yläpuolinen reunaehto maankosteusmallien verifiointiajoissa.



Kuva 12. Pohjavedenpinnan korkeuden (syvyys maanpinnalta) käyttäytyminen (laskettu arvo) maankosteusmallien verifiointiajoissa.

Molempien menetelmien voi katsoa antavan riittävän tarkan tuloksen, kun pohjavedenpinnan korkeuden vaihtelu annetaan lähtötietona (tällöin ollaan kiinnostuneita vain profiilin matrikpotentiaalien ja kosteuspiitoisuuksien arvoista).

Sen sijaan, jos halutaan laskea pohjavedenpinnan korkeus, on elementtimenetelmän käyttö suositeltavampi vaihtoehto.

4.2 Aika-askeleen ja ϵ :n valinta differenssimenetelmällä

Differenssimenetelmässä annetaan lähtötietona kerroin ϵ , joka ratkaisee minkä tyyppinen approksimaatio osittaisdifferensiaaliryhtälön termeille valitaan.

ϵ :n arvolla 0.0 saadaan täysin eksplisiittinen ratkaisu.

Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että aikaderivaatta approksimoidaan yhtälöllä (12), josta saadaan tuntematon ψ_1^{j+1} .

Sen sijaan osittaisderivaatat syvyyden suhteen korvataan estimateilla, jotka eivät sisällä lainkaan tuntemattomia matrikpotentiaalin arvoja aikatasolta $j+1$. Tästä seuraa, että kun laskenta lähtee etenemään ylimmästä solmupisteestä alkaen, voidaan solmupisteen 1 tuntematon matrikpotentiaalin arvo laskea "eksplisiittisesti", eli yksikäsitteisesti tunnettujen termien avulla. Sen jälkeen edetään solmupisteeseen 2, jonka ψ :n arvo voidaan ratkaista, jne. Kun kaikkien solmupisteiden matrikpotentiaalin arvot aikatasolta $j+1$ tunnetaan, voidaan siirtyä seuraavaan aika-askeleeseen.

Kun ϵ :n arvo poikkeaa nolasta, ei tuntemattomia ψ :n arvoja pystytäkään enää ratkaisemaan yksikäsitteisesti tunnettujen termien arvulla, sillä tällöin kertoimet K , S ja C sisältävät tuntemattomien arvoja aika-tasolta $j+1$ (kaavat (13) - (16)). Ongelma ratkaistaan siten, että kaikille profiilin solmupisteille kirjoitetaan vastaavat yhtälöt (kaava (20)), jotka sitten ratkaistaan samanaikaisesti luvun 2 lopussa esitetyllä iteratiivisella menetelmällä. Kun ϵ :n arvo on 0.5 puhutaan nk. Crank-Nicolson approksimaatiosta. Jos taas $\epsilon = 1.0$, on kyseessä täysin implisiittinen ratkaisu.

Stabiilisuusongelman kannalta ϵ :n arvon ollessa ≥ 0.5 , on ratkaisu stabiili aika-askeleen pituudesta riippumatta. Käytettävän aika-askeleen pituus voidaan valita riittävän lyhyeksi, jotta tarkkuus ei kärsi. Sen sijaan eksplisiittisessä menetelmässä on stabiilisuusnäkökohta otettava aina huomioon. Epästabiilisuus aiheutuu siitä, että tuntemattomien yhtälöiden kertoimet eivät sisällä informaatiota siitä, mihin suuntaan ratkaisu on menossa. Mikäli reunaehdot vaihtuvat nopeasti, voi tästä olla seurauksena se, että aika-askeleen ollessa riittävän pitkä, tulee joku solmupiste vedellä kyllästyneeksi (sen matrikpotentiaalin arvo on suurempi kuin nolla). Tästä puolestaan aiheutuu se, että seuraavalla aika-askeleella esim. hydraulisen johtavuuden kerroin saa epämielekkäitä arvoja myös ko. pisteen ylä- ja alapuolisessa solmupisteessä. Häiriö lähtee siten etenemään ja hallitsee lopulta koko ratkaisua. Epästabiilissa ratkaisussa on tyypillistä, että joka toinen matrikpotentiaalin arvo on erittäin pieni, ja joka toinen erittäin suuri. Epästabiilisuus voidaan välttää eksplisiittisessä ratkaisussa käyttämällä tarpeeksi lyhyttä aika-askelta. Aika-askeleen pituuden valinta voidaan suorittaa esim. kokeilemalla.

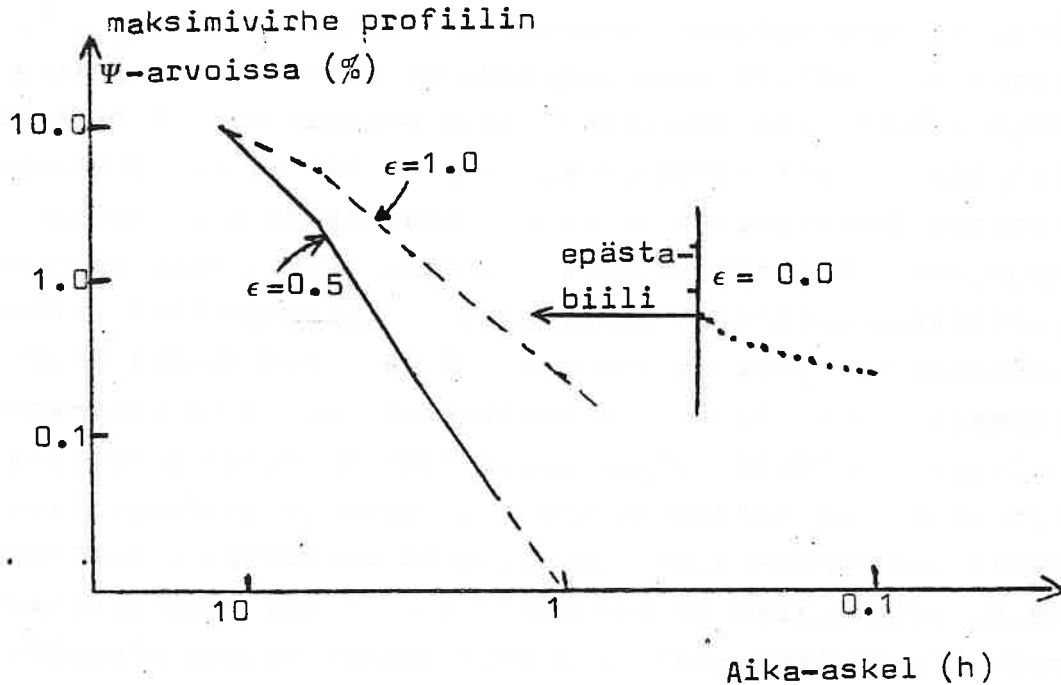
Seuraavassa on esitetty esimerkki laskentatilanteesta, jossa:

- pohjavedenpinta nousee vuorokauden aikana 95 cm:stä 60 cm:iin sadannan ollessa 20 mm ja potentiaalisen haihdunnan 5 mm
- profiili on tasapainossa lähtötilanteessa.

Kuvassa 13 on esitetty maksivirhe profiilin $|\psi|$:n arvoissa olettaen, että ϵ :n arvolla 0.5 ja aika-askeleen arvolla 1 h saadaan "tarkka ratkaisu".

ϵ :n arvolla 0.5 saadaan aika-askeleen pituudella 3 h vielä erittäin hyviä tuloksia, ja Δt :n arvo 6 h antaa varsin tyydyttävän tulokset (maksimivirheet 0.25 ja 2.5 %).

ϵ :n arvolla 1.0 on maksimivirhe aika-askeleella 1 h 0.25 %, aika-askeleella 3 h 1.5 % ja Δt :n arvolla 6 h 5.4 %. Sekä Crank-Nicolsonilla, että täysin implisiittisellä ratkaisulla antaa aika-askel 12 h kutakuinkin saman maksimivirheen (10 %). Sen sijaan eksplisiittinen ratkaisu on stabiili vasta, kun aika-askel on lyhyempi kuin .33 h (20 min). ϵ :n arvolla



Kuva 13. Maksimivirhe profiilin matrikpotentiaalin arvoissa eri aika-askeleilla ja ϵ :n arvoilla.

0.5 päästään samaan tarkkuuteen 10 - 15 kertaa pidemmällä aika-askeleella (tässä tapauksessa) kuin eksplisiittisellä approksimaatiolla. Eksplisiittinen ratkaisu näyttäisi antavan varsin tarkkoja tuloksia (maksimivirhe 0.6 %) kunhan stabiilisuus säilyy.

4.3 Aikaderivaatan approksimointi elementtimenetelmässä

Elementtimenetelmässä aikaderivaatta korvattiin Neumanin (1973) suosittamalla tavalla (kaava (60)). Tässä olisi mahdollista käyttää aikaderivaatan korvaamisessa standardimenetelyä:

$$\int_{\Omega} C(\hat{\psi}) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} N_i dz = \int_{\Omega} \underline{C} \sum_j (N_j \frac{d\psi_j}{dt}) N_i dz \quad (81)$$

Siirryttäessä lokaaliseen koordinaatistoon ja korvattaessa $\underline{C}$ kaavalla (63) voidaan kirjoittaa:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega^e} \sum_i (C_1^e N_1^e) N_1^e \sum_j (N_j^e \frac{d\psi_j^e}{dt}) dz \\
 &= \int_{\Omega^e} (C_1^e N_1^e + C_2^e N_2^e) N_1^e (N_1^e \frac{d\psi_1^e}{dt} + N_2^e \frac{d\psi_2^e}{dt}) dz \\
 &= \int_{\Omega^e} \left[(C_1^e N_1^e N_1^e N_1^e + C_2^e N_2^e N_1^e N_1^e) \frac{d\psi_1^e}{dt} + \right. \\
 &\quad \left. (C_1^e N_1^e N_2^e N_1^e + C_2^e N_2^e N_2^e N_1^e) \frac{d\psi_2^e}{dt} \right] dz \\
 &= \frac{L^e}{12} \begin{pmatrix} 3C_1^e + C_2^e & C_1^e + C_2^e \\ C_1^e + C_2^e & C_1^e + 3C_2^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\psi_1^e/dt \\ d\psi_2^e/dt \end{pmatrix} \quad (82)
 \end{aligned}$$

Siten kaavan (71) kerroinmatriisi $[B]^e$ saa muodon:

$$[B_{ij}]^e = \frac{L^e}{12} \begin{pmatrix} 3C_1^e + C_2^e & C_1^e + C_2^e \\ C_1^e + C_2^e & C_1^e + 3C_2^e \end{pmatrix} \quad (83)$$

Esimerkiksi alkio B_{22}^e voidaan laskea seuraavasti:

$$\begin{aligned}
 B_{22}^e &= \int_{\Omega^e} (C_1^e N_1^e N_2^e N_2^e + C_2^e N_2^e N_2^e N_2^e) dz \\
 &= \int_0^{L^e} \left[C_1^e \left(1 - \frac{z}{L^e}\right) \cdot \frac{z^2}{(L^e)^2} + C_2^e \frac{z^3}{(L^e)^3} \right] dz \\
 &= \int_0^{L^e} \left[C_1^e \left(\frac{z^3}{3(L^e)^2} - \frac{z^4}{4(L^e)^3} \right) + C_2^e \frac{z^4}{4(L^e)^3} \right] dz \\
 &= \frac{L^e}{12} C_1^e + \frac{L^e}{4} C_2^e = \frac{L^e}{12} (C_1^e + 3C_2^e)
 \end{aligned}$$

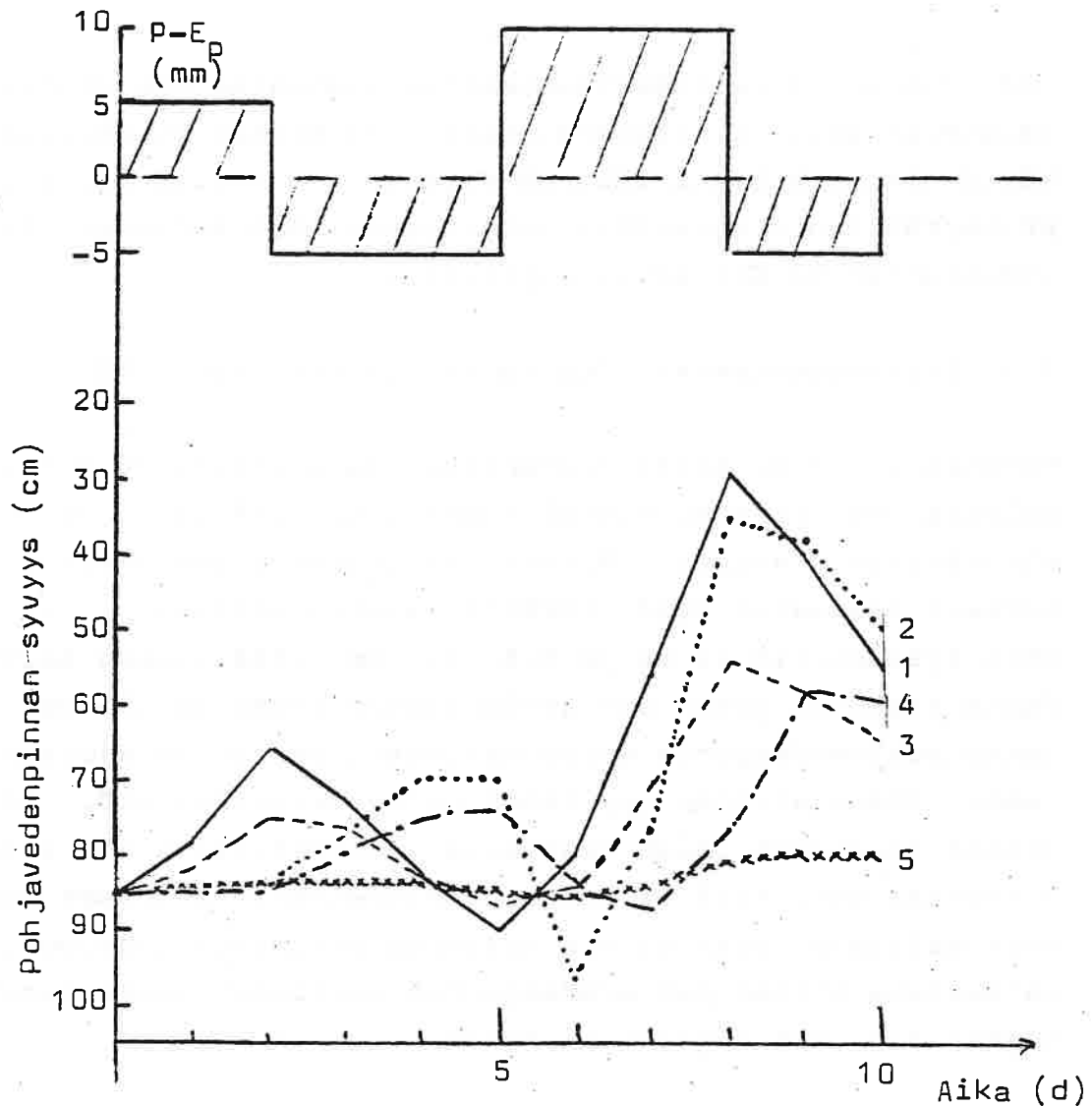
Kaavasta (83) nähdään, että kerroinmatriisi $[B]^e$ ei ole enää diagonaalimatriisi, kuten Neumanin suosittelemassa menetelmässä (kaava (74)). Esimerkkinä laskettiin molempia aikaderivaatan approksimaatiokeinoja käyttäen seuraava tilanne:

- profiili on alussa tasapainotilassa
- sadanta on 13 mm
- potentiaallinen haihdunta 5 mm
- pohjavedenpinta pidetään vakiona

Sekä differenssimenetelmä, että elementtimenetelmä käyttäen Neumanin ehdottamaa aikaderivaatan approksimaatiota antoivat tarkalleen samat matrikpotentiaalin arvot koko profiilille. Sen sijaan kaavan (81) mukainen aikaderivaatan estimaatti johti siihen, että profiilin matrikpotentiaalin arvot poikkesivat keskimäärin 2 % kahdella muulla menetelmällä saaduista arvoista. Tämän yhdenkin esimerkin perusteella voitaneen päätellä, että Neumanin suosittelema aikaderivaatan approksimaatio on suositeltavampi, etenkin kun kerroinmatriisi $[B]$ on diagonaalinen, mikä säästää tietokoneen muistitilaa huomattavasti (vain lävis-täjäelementit sisältävä vektori pidetään muistissa).

4.4 Differentiaalisen vesikapasiteetin ja hydraulisen johtavuuden vaikutus pohjaveden muodostumiseen

Pohjavedenpinnan vaihtelun suuruus on oleellisesti sidoksissa maalajityyppiin. Itse asiassa hydraulisen johtavuuden arvot, sekä pF-käyrän muoto lähellä kyllästyspistettä ovat keskeisimmät seikat, jotka määräävät miten nopeasti muutokset reunaehdoissa heijastuvat pohjavedenpinnan muutoksiin. Esimerkkinä laskettiin kuvassa 14 esitetyllä sadanta - potentiaallinen haihdunta - tapah-tumalla pohjavedenpinnan korkeuden vaihtelu hiedalla (4 vaihto-ehtoa) ja soralla. Laskennan lähtötilanteessa pohjavedenpinta oli 85 cm:n syvyydellä ja profiili oli tasapainossa. Hiedalla käytettiin kahta eri K_s :n (hydraulisen johtavuuden kerroin kyl-lästyneessä tilassa) arvoa, sekä kahta erilaista differentiaali-sen vesikapasiteetin arvoa (C :n arvot erilaiset vain lähellä kyllästyspistettä, eli arvo C_s).



- 1 Hieta, $K_s = 17.6 \text{ cm/d}$, $C_s = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3/\text{cm}^3/\text{cm}$
- 2 Hieta, $K_s = 1.76 \text{ cm/d}$, $C_s = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3/\text{cm}^3/\text{cm}$
- 3 Hieta, $K_s = 17.6 \text{ cm/d}$, $C_s = 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^3/\text{cm}^3/\text{cm}$
- 4 Hieta, $K_s = 1.76 \text{ cm/d}$, $C_s = 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^3/\text{cm}^3/\text{cm}$
- 5 Sora, $K_s = 1120 \text{ cm/d}$, $C_s = 0.07 \text{ cm}^3/\text{cm}^3/\text{cm}$

Kuva 14. Pohjavedenpinnan korkeuden vaihtelu hiedassa ja sorassa. Selostus tekstissä.

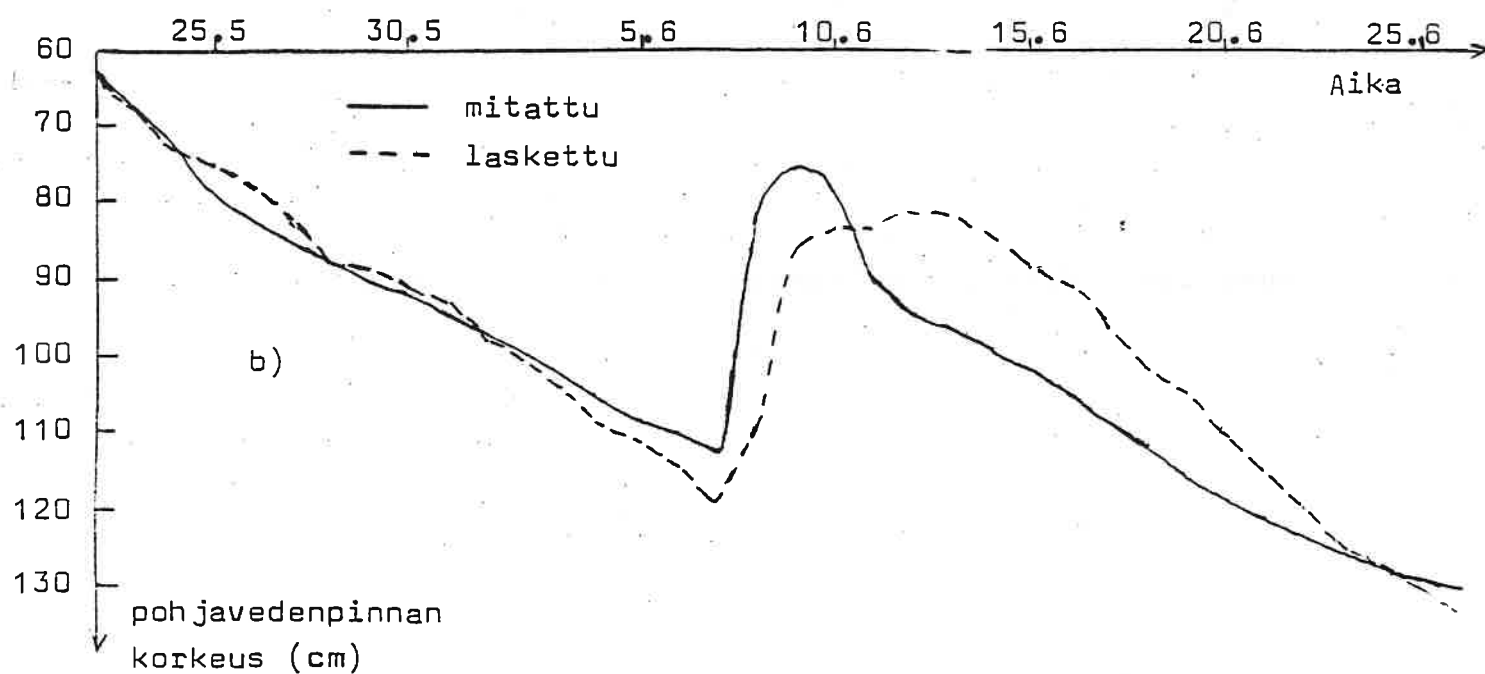
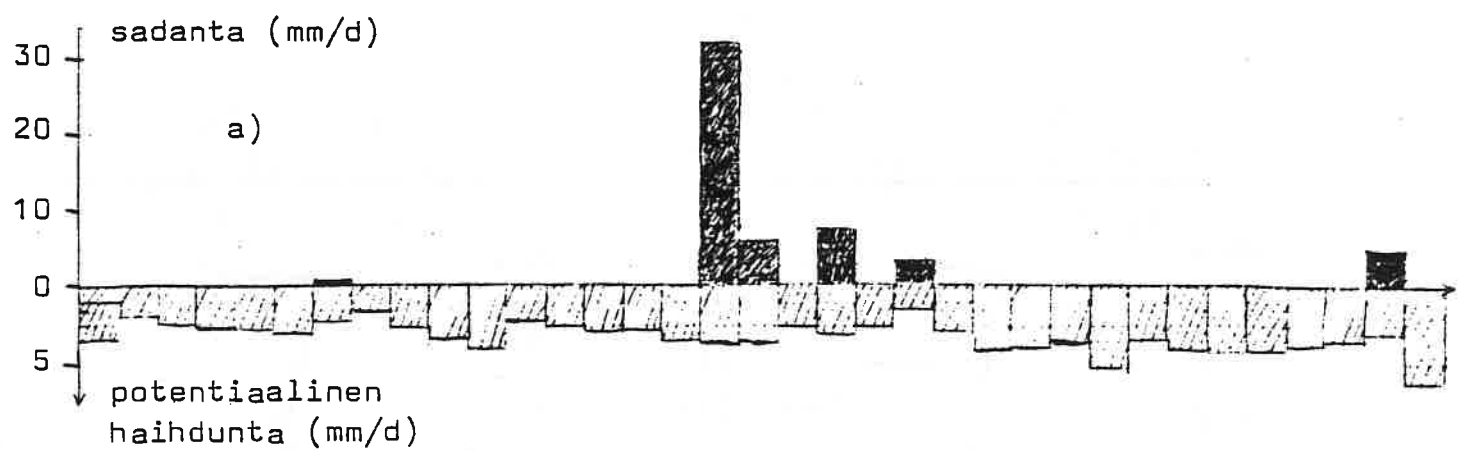
Kuvän 14 mukaan pohjavedenpinnan vaihtelu on soramaalla samoilla reunaehdoilla vain 5 cm, kun se hietamaalla ko. laskentaesimerkissä on vähintään 35 cm. Tämä johtuu tietysti siitä, että $C:n$ arvo soralla on 70 - 280 kertaa suurempi kuin hiedalla. Hiedassa $K_s:n$ arvon pienentäminen kymmenesosaan alkuperäisestä aiheuttaa sen, että pohjavedenpinnan korkeuden vaihtelu on suurinpiirtein sama (61 ja 62 cm), mutta pinnankorkeuden kulku erilai-

nen. C:n arvon nelinkertaistaminen pienentää pohjavedenpinnan vaihtelun puoleen alkuperäisestä. Esimerkin tuloksilla on käytännön merkitystä lähinnä siten, että mallin kalibroinnissa pF-käyrän muoto vaikuttaa pohjavedenpinnan korkeusvaihteluiden amplitudiin ja K:n arvot ajoitukseen.

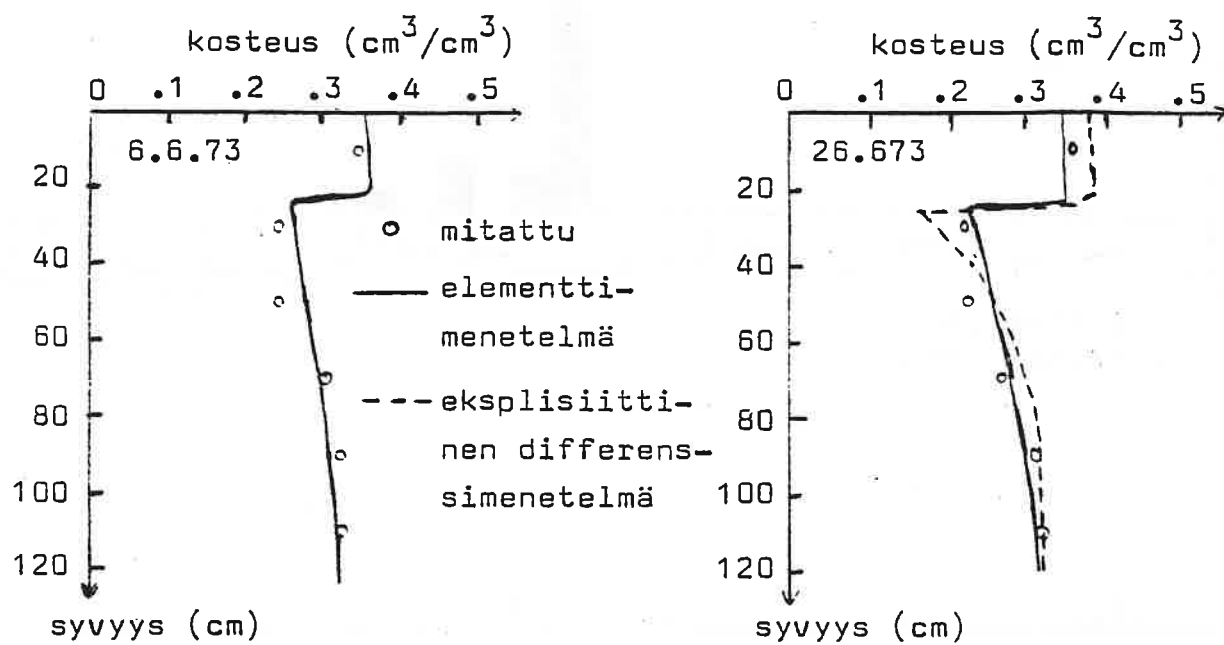
4.5 Laskentaesimerkki Otaniemen lysimetrikentältä

Kuvassa 15 on esitetty laskentatuloksia ajalta 20.5 - 26.6.1973. Tuloksia on verrattu hietalysimetristä (päällä 25 cm humusta) mitattuihin arvoihin. Mitattu ja laskettu pohjavedenpinnan korkeus vastaavat tyydyttävällä tavalla toisiaan. 7.6 lisättiin lysimetriin 32 mm ja 6.6 6.2 mm vettä pinnan kautta. Tästä aiheutui nopea pohjavedenpinnan nousu (n. 35 cm). Laskettu pohjavedenpinta eroaa mitatusta varsinkin ajoituksen suhteen. Pääasiallinen syy tähän on hysteresis-ilmiö. Pohjavedenpinnan noustessa (maan kostuessa) maaprofiiliin jää ilmaa, joka aiheuttaa sen, että luonnossa pohjavedenpinta nousee nopeammin kuin mallissa, joka ei ota hysteresis-ilmiötä huomioon. Kokonaisuutena ottaen pohjavedenpinnan korkeuden laskentarutiini toimii mallissa verrattain hyvin.

Mitatut ja lasketut kosteuspitoisuudet on esitetty kuvassa 15c. Elementtimenetelmällä saatuja tuloksia on verrattu myös Vakkilaisen (1982) eksplisiittisellä differenssimenetelmällä saamiin tuloksiin. Tulokset poikkeavat toisistaan pääasiassa siitä syystä, että Vakkilainen antoi pohjavedenpinnan korkeuden lähtötietona, kun taas elementtimenetelmässä pohjavedenpinnan korkeus laskettiin. Toisaalta kerrostuneen maan käsittely elementti- ja differenssimenetelmässä poikkeavat jonkin verran toisistaan. Mitattujen ja laskettujen kosteuspitoisuuksien vastaavuutta olisi voitu edelleen parantaa kalibroimalla hydraulisen johtavuuden arvoja.



Kuva 15. Hietalysimetri, päällä 25 cm humusta. Jakso 20.5-20.6.73.
a) Sadanta ja potentiaallinen haihdunta
b) Mitattu ja laskettu pohjavedenpinnan korkeus.



Kuva 15c. Mitattu ja laskettu kosteuspitoisuus.

YHTEENVETO

Tässä julkaisussa on esitelty sekä elementti- että differenssimenetelmäratkaisut, joilla voidaan laskea infiltraatio ja maankosteusprofiili, kun sadanta ja potentiaalinen haihdunta tunnetaan. Todellinen haihdunta lasketaan matrikpotentiaalın funktiona. Maanpinta voi olla paljas tai kasvillisuuden peitossa. Ratkaistava osittaisdifferentiaaliyhtälö on nk. Richardsin yhtälö, joka on laajennus Darcy'n menetelmästä.

Maan pinnalla annetaan reunaehtona sadanta, joka jaetaan infiltraatioksi ja pintavalunnaksi. Infiltraatio saadaan maksimoimalla pinnan kautta kulkeva vesimäärä olettaen, että sateella maan pinnalla on hyvin ohut kerros, joka on vedellä kyllästynyt. Pohjalla on mahdollisuus valita reunaehtona joko pohjavedenpinnan korkeus (annetaan lähtötietona) tai systeemiin pohjan kautta tuleva vesimäärä, jolloin pohjavedenpinnan korkeus lasketaan. Differenssimenetelmässä on mahdollista valita tapa, jolla osittaisderivaatat matkan suhteen estimoidaan. Painotuskertoimella voidaan vertailla esimerkiksi täysin eksplisiittisen tai täysin implisiittisen ratkaisun ja Crank-Nicolson approksimaation antamia tuloksia keskenään. Diskretoinnin tuloksena syntyvät yhtälöryhmät ratkaistaan predictor-corrector-tyyppisellä iteratiivisella menetelmällä.

Elementtimenetelmää käyttävä ohjelma perustuu Galerkinin keinoon. Muotofunktiot ovat lineaarisia 1. asteen polynomeja. Elementit ovat kaksisolmuisia viivaelementtejä. Elementtimenetelmässä voidaan niinikään valita painotuskertoimen arvo, joskin suositeltavinta on käyttää ϵ :lla arvoa 0.5, eli Crank-Nicolson approksimaatiota.

Mallin verifiointiajot osoittivat, että molemmilla menetelmillä saadaan lähes sama kosteusprofiili. Sen sijaan pohjavedenpinnan korkeuden vaihtelu on suositeltavampaa laskea elementtimenetelmällä, etenkin kun kerrostuneen profiilin käsittely ei tuota ongelmia.

Aika-askeleen valinta differenssimenetelmässä on stabiilisuuden kannalta oleellista vain eksplisiittisessä ratkaisussa. Impliittiinen ratkaisu on aina stabiili, mutta aika-askelta ei ole syytä valita liian pitkäksi, jottei tarkkuus kärsi. Eksplisiittinen menetelmä näyttäisi antavan varsin tarkkoja tuloksia, kunhan stabiilisuus säilyy.

KIRJALLISUUSLUETTELO

- ABBOTT, M.B. ja CUNGE, J.A. (1982). Engineering applications of computational hydraulics. Pitman Books Limited, Massachusetts. s. 40-70.
- ANDERSSON, S. ja Wiklert, P. (1972). Markfysikaliska undersökningar i odlad jord. XXIII. Om de vattenhållande egenskaperna hos svenska jordarter. Särtryck ur Grundförbättring 1972:2-3. s. 53 - 143.
- BELMANS, O., WESSELING, J.G. ja FEDDES, R.A. (1981). Simulation model of the water balance of a cropped soil: SWATRE. Will be published in Journal of hydrology in 1982. 20 s.
- FEDDES, R.A. (1979). Physics of soil moisture. Eighteenth International Course on Land Drainage, Wageningen, The Netherlands, 1979. 25 s.
- FEDDES, R.A., BRESLER, E. ja NEUMAN, S.P. (1974). Field test of a modified numerical model for water uptake by root systems. Wat. Res. Res. 10 (6), 1199 - 1206.
- FEDDES, R.A., KOWALIK, P., NEUMAN, S.P. ja BRESLER, E. (1976). Finite difference and finite element simulation of field water uptake by plant. Institute for Land and Water Management Research, Wageningen. The Netherlands, Technical Bulletin 94. 18 s.
- FEDDES, R.A., KOWALIK, P. ja ZARADNY, H. (1978). Simulation of field water use and crop yield. Centre for Agricultural Publishing Documentation, Wageningen, The Netherlands. s. 1 - 107.
- NEUMAN, S.P. (1973). Saturated-unsaturated seepage by finite elements. Journal of the Hydr. Div. 99 (HY12), 2233-2250.

- NEUMAN, S.P., FEDDES, R.A. ja BRESLER, E. (1975a). Finite element analysis of two-dimensional flow in soils considering water uptake by roots: I. Theory. Soil Science Society of America Proceedings, 39 (2), 224-230.
- NEUMAN, S.P., FEDDES, R.A. ja BRESLER, E. (1975b). Galerkin method of simulating water uptake by plants. Modelling and Simulation of Water Resources Systems, edited by G.C. VANSTEENKISTE, North-Holland Publishing Company. s. 325 - 348.
- NIMAH, M.N. ja Hanks, R.J. (1973) Model for estimating soil sater, plant and atmospheric interrelations. I. Description and sensitivity. Soil Sci. Soc. Amer. Proc. 37, s. 522 - 527.
- PICKENS, J.F., GILLHAM, R.W. ja CAMERUN, D.R. (1979). Finite-element analysis of the transport of water and solutes in tile-drained soils. Journal of Hydrology, 40, s. 243 - 264.
- PICKENS, J.F. ja GILLHAM, R.W. (1980). Finite element analysis of solute transport under hysteretic unsaturated flow conditions. Wat. Res. Res. 16 (6), s. 1071 - 1078.
- PINDER, G.F. ja GRAY, W.G.G. (1977). Finite element simulation in surface and subsurface hydrology. Academic Press, London. 289 s.
- RASMUSON, A.S. (1978). Water flow in an unsaturated porous medium. Avhandling, Institutionen för kemisk apparat-teknik, KTH. s. 1 - 51.
- REMSON, I., HORNBERGER, G.M. ja MOLZ, J.F. (1971). Numerical methods in subsurface hydrology. Wiley Intersci., New York. s. 1 - 240.
- RICHARDS, L.A. (1931). Capillary conduction of liquids through porous media. Physics 1, s. 318 - 333.

VAKKILAINEN, P. (1981). Uusi maankosteuden laskentamalli.
Vesitalous, No. 1., s. 37 - 38.

VAKKILAINEN, P. (1982). Maa-alueelta tapahtuvan haihdunnan
arvioinnista. On the estimation of evapotranspiration.
Vesirakennustekniikan laitos, Oulun yliopisto. 146 s.

VAKKILAINEN, P. ja KARVONEN, T. (1982a). SATT-I, Osa I,
Ohjelman kuvaus. Salaojakeskus, Helsinki, 57 s.

VAKKILAINEN, P. ja KARVONEN, T. (1982b). SATT-I: Adaptive
rainfall-runoff modell will by published in Acta
Polytechnica Scandinavia. 45 s.

ZARADNY, H. ja FEDDES, R.A. (1978). Calculation of non-steady
flow towards a drain in saturated-unsaturated soil
by finite elements. Agric. Wat. Man., 2, s. 37 - 53.